

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYMUN ÇİÇEĞİ VİRÜSÜ'NÜN MATEMATİKSEL
MODELLEMESİ VE KARARLILIK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı Soyadı : Abdulkadir YILMAZ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :

Enstitü Ana Bilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Özkan ÖZTÜRK

Mart 2026
GİRESUN

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAYMUN ÇİÇEĞİ VİRÜSÜ'NÜN MATEMATİKSEL
MODELLEMESİ VE KARARLILIK ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Abdulkadir YILMAZ

Enstitü Ana Bilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 25/03/2026 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr.
Canan ÇİFTÇİ
Jüri Başkanı

Doç. Dr.
Mahir DEMİR
Üye

Prof. Dr.
Özkan ÖZTÜRK
Üye

Prof. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Abdulkadir YILMAZ

25/03/2026

TEŞEKKÜR

Bu yüksek lisans tezinin hazırlanma sürecinde bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana yol gösteren; her aşamada desteğini esirgemeyen ve değerli görüş ile önerileriyle çalışmama önemli katkılar sunan danışmanım Prof. Dr. Özkan Öztürk'e en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisi, tez çalışmam süresince yalnızca akademik anlamda değil, aynı zamanda kişisel gelişimim açısından da ilham verici olmuş; yönlendirici ve yapıcı katkılarıyla bu çalışmanın şekillenmesinde belirleyici bir rol oynamıştır.

Bu süreç boyunca karşılaştığım tüm zorluklarda sabır ve anlayışlarını hiçbir zaman esirgmeden her daim yanımda olan aileme; verdikleri manevi destek, bana duydukları güven ve inanç sayesinde motivasyonumun azaldığı her anda yeniden güç bulmamı sağlayan kıymetli arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi sunarım. Onların varlığı ve desteği, bu akademik yolculuğu kararlılıkla sürdürmemde ve hedeflerime ulaşmamda önemli bir motivasyon kaynağı olmuştur.

Son olarak, bu çalışmaya doğrudan katkıları bulunmamakla birlikte, öğrencilik hayatım boyunca bilgi ve deneyimleriyle bana ilham veren; akademik yolculuğa adım atmamda iç motivasyonumun oluşmasına doğrudan ya da dolaylı katkı sağlayan, başta jüri üyeleri olmak üzere tüm kıymetli hocalarıma saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
TABLolar LİSTESİ	VIII
ÖZET	IX
SUMMARY	X
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
1.1. Temel Bilgiler ve Literatür Taraması	1
1.2. SIR Modellemesi	3
1.3. Demografik Yapılı SIR modeli	6
1.4. Temel Matematiksel Bilgiler	7
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	11
2.1. Giriş ve Literatür Taraması	11
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	15
3.1. Maymun Çiçeği Virüsünün Matematiksel Modellemesi	15
3.2. Hastalığın Olmadığı Denge Noktasının Kararlılık Analizi	19
3.3. Hastalığın Olduğu Denge Noktası ve Kararlılık Analizi	25
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	34

4.1. Hastalığın Olmadığı Denge Noktasının Simülasyonu	34
4.2. Hastalığın Olduğu Denge Noktasının Simülasyonu	38
4.3. $\mathcal{R}_{0_i}$ ve $\mathcal{R}_{0_k}$ Temel Üreme Sayılarının Lokal Hassasiyet Analizi	42
4.4. β_1, β_3 ve β_5 Parametrelerin Etkisi	44
4.4.1. β_1 Parametresinin Etkisi	44
4.4.2. β_3 Parametresinin Etkisi	46
4.4.3. β_5 Parametresinin Etkisi	49
 BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	 53
 KAYNAKLAR	 54
ÖZGEÇMİŞ	56

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{R}_+^n$	: n boyutlu pozitif Öklid uzayı
MÇ	: Maymun çiçeği
MÇV	: Maymun çiçeği virüsü
HKÖM(CDC)	: Hastalık kontrol ve önleme merkezi
N	: Popülasyondaki toplam birey sayısı
S	: Popülasyondaki hastalığa duyarlı bireylerin sayısı
I	: Popülasyondaki hastalıklı bireylerin sayısı
R	: Popülasyondaki iyileşmiş bireylerin sayısı
β	: Hastalığın bulaşma oranı
γ	: Hastalığın atlatılma oranı
v	: Birim zamandaki doğal doğum oranı veya gelen göçlerin sayısı
μ	: Birim zamandaki doğal ölüm oranı
N_k	: Kemirgen popülasyonun toplam sayısı
S_k	: Hastalığa duyarlı kemirgenlerin sayısı
I_k	: Hasta kemirgenlerin sayısı
R_k	: İyileşmiş kemirgenlerin sayısı
N_i	: İnsan popülasyonun toplam sayısı
S_i	: Hastalığa duyarlı insanların sayısı
I_i	: Hasta insanların sayısı
R_i	: İyileşmiş veya karantinadan çıkmış insanların sayısı
β_{k_1}	: Hastalığın bir kemirgenden başka bir kemirgene bulaşma oranı
β_{k_2}	: Hastalığın bir kemirgenden bir insana bulaşma oranı
β_i	: Hastalığın bir insandan başka bir insana bulaşma oranı
γ_k	: Kemirgen popülasyonunda meydana gelen iyileşme oranı

γ_i	: İnsan popülasyonunda meydana gelen iyileşme oranı
Λ_k	: Kemirgen popülasyonunda meydana gelen doğum oranı
Λ_i	: İnsan popülasyonunda meydana gelen doğum oranı
S_{i1}	: Hastalığa duyarlı bilinçli insanların sayısı
S_{i2}	: Hastalığa duyarlı bilinçsiz insanların sayısı
E_i	: Hastalığı maruz kalmış hasta olmayan insanların sayısı
Q	: Karantinadaki insanların sayısı
β_1	: Bilinçli insanların hastalanma oranı
β_2	: Bilinçsiz insanların hastalanma oranı
β_3	: Bilinçli insanların kendini karantinaya alma oranı
β_4	: Hastalığa maruz kalmış insanların hastalanma oranı
β_5	: Karantinadaki insanların karantinadan çıkma oranı
β_6	: Hasta insanların iyileşme oranı
α_1	: Kemirgenlerin hastalanma oranı
α_2	: Hasta kemirgenlerin iyileşme oranı
α_3	: Hastalığın kemirgenden insana bulaşma oranı
Λ_1	: Yeni gelen bilinçli insanların oranı
Λ_2	: Yeni gelen bilinçsiz insanların oranı
Λ_3	: Kemirgenlerdeki doğum oranı
$\mathcal{R}_0$	: Temel Üreme Sayısı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1.1. SIR Modelinin Simülasyonu	5
Şekil 2.1. Derideki Maymun Çiçeği Virüsü Lezyonları ve Yapısı [14, 15]	12
Şekil 2.2. (2.1) Sisteminin Akış Diyagramı	14
Şekil 4.1. Hastalığın Olmadığı Durumda S_{i_1} ve S_{i_2} sınıflarının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi	35
Şekil 4.2. Hastalığın Olmadığı Durumda E_i , I_i ve Q sınıflarının, $0 \leq t \leq 100$ zaman aralığındaki, değişimi	36
Şekil 4.3. Hastalığın Olmadığı Durumda R_i sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi	36
Şekil 4.4. Hastalığın Olmadığı Durumda S_k sınıfının, $0 \leq t \leq 300$ zaman aralığındaki, değişimi	37
Şekil 4.5. Hastalığın Olmadığı Durumda I_k ve R_k sınıflarının, $0 \leq t \leq 250$ zaman aralığındaki, değişimi	37
Şekil 4.6. Hastalığın Olduğu Durumda S_{i_1} ve S_{i_2} sınıflarının, $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığındaki, değişimi	40
Şekil 4.7. Hastalığın Olduğu Durumda E_i , I_i ve Q sınıflarının, $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığındaki, değişimi	40
Şekil 4.8. Hastalığın Olduğu Durumda R_i sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi	41
Şekil 4.9. Hastalığın Olduğu Durumda S_k ve I_k sınıflarının, $0 \leq t \leq 10$ zaman aralığındaki, değişimi	41

Şekil 4.10. Hastalığın Olduğu Durumda R_k sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi	42
Şekil 4.11. $\beta_1 = 0,06$ için S_{i_1} ve S_{i_2} sınıflarının, $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığındaki, değişimi	45
Şekil 4.12. $\beta_1 = 0,06$ için E_i , I_i ve Q sınıflarının, $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığındaki, değişimi	45
Şekil 4.13. $\beta_1 = 0,06$ için R_i sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi	46
Şekil 4.14. $\beta_1 = 0,06$ ve $\beta_3 = 1,5$ için S_{i_1} ve S_{i_2} sınıflarının, $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığındaki, değişimi	47
Şekil 4.15. $\beta_1 = 0,06$ ve $\beta_3 = 1,5$ için E_i , I_i ve Q sınıflarının, $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığındaki, değişimi	48
Şekil 4.16. $\beta_1 = 0,06$ ve $\beta_3 = 1,5$ için R_i sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi	48
Şekil 4.17. $\beta_1 = 0,06$, $\beta_3 = 1,5$ ve $\beta_5 = 0,0333$ için E_i , I_i ve Q sınıflarının, $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığındaki, değişimi	50
Şekil 4.18. $\beta_1 = 0,06$, $\beta_3 = 1,5$ ve $\beta_5 = 0,0333$ için R_i sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi	51

TABLolar LİSTESİ

Tablo 4.1. Hastalığın Olmadığı Denge Noktası için Sınıfların ve Parametrelerin Tablosu.....	34
Tablo 4.2. Endemik Denge Noktası için Sınıfların Başlangıç ve Parametrelerin Değer Tablosu	38
Tablo 4.3. $\mathcal{R}_{0_i}$ ve $\mathcal{R}_{0_k}$ için Duyarlılık İndeksi Tablosu.....	43
Tablo 4.4. β_1 Parametresinin İnsan Sınıfları Üzerindeki Etki Tablosu	44
Tablo 4.5. β_3 Parametresinin İnsan Sınıfları üzerindeki Etki Tablosu	47
Tablo 4.6. β_5 Parametresinin İnsan Sınıfları üzerindeki Etki Tablosu	50

MAYMUN ÇİÇEĞİ VİRÜSÜ'NÜN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ VE KARARLILIK ANALİZİ

ÖZET

Bu tezde, kemirgenlerden insanlara bulaşan maymun çiçeği virüsünün (MÇV) yayılım dinamiklerini incelemek amacıyla bir matematiksel model geliştirilmiştir. Çalışmanın ilk aşamasında, MÇV'nin epidemiyolojik özelliklerini ele alan mevcut literatür taranmış ve daha önce önerilmiş matematiksel modeller incelenerek bu modellerin güçlü ve zayıf yönleri değerlendirilmiştir. Bu değerlendirme doğrultusunda, literatürdeki çalışmalarını tamamlayıcı nitelikte yeni bir model önerilmiştir.

Önerilen modelin biyolojik olarak anlamlılığını sağlamak amacıyla sistemin pozitif değişmez kümesi belirlenmiş ve modelin salgın potansiyelini ölçmek için temel üreme sayısı $\mathcal{R}_0$, yeni jenerasyon matris yöntemi kullanılarak elde edilmiştir. Ardından, sistemin denge davranışını analiz etmek amacıyla hastalığın olmadığı denge noktası ile hastalığın var olduğu (endemik) denge noktaları hesaplanmıştır. Bu denge noktalarının yerel kararlılığı, sistemin Jacobi matrisi yardımıyla incelenmiş ve Routh–Hurwitz kriteri kullanılarak gerekli ve yeterli kararlılık koşulları türetilmiştir.

Elde edilen analitik sonuçlar, temel üreme sayısının kritik bir eşik değeri olduğunu ve $\mathcal{R}_0 < 1$ durumunda hastalığın zamanla popülasyondan yok olduğunu, $\mathcal{R}_0 > 1$ durumunda ise hastalığın kalıcı hale gelerek endemik bir denge noktasına yaklaştığını göstermektedir. Ayrıca, model parametrelerinin sistem dinamikleri üzerindeki etkilerini ortaya koymak amacıyla duyarlılık analizi gerçekleştirilmiştir.

Son aşamada, teorik bulguların doğruluğunu ve modelin zamana bağlı davranışını desteklemek için sayısal simülasyonlar sunulmuştur. Bu simülasyonlar, analitik olarak elde edilen kararlılık sonuçlarını doğrulamakta ve modelin epidemiyolojik açıdan tutarlı sonuçlar verdiğini göstermektedir. Elde edilen bulguların, maymun çiçeği virüsünün yayılım mekanizmasının daha iyi anlaşılmasına ve hastalıkla mücadelede uygulanabilecek kontrol stratejilerinin geliştirilmesine katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Anahtar kelimeler: SIR, SEIR, Bulaşıcı hastalıklar, Maymun Çiçeği

MATHEMATICAL MODELING AND STABILITY ANALYSIS OF MONKEYPOX VIRUS

SUMMARY

In this thesis, a mathematical model is developed to investigate the transmission dynamics of the monkeypox virus (MPXV) from rodents to humans. In the first stage of the study, the existing literature on the epidemiological characteristics of MPXV is reviewed, and previously proposed mathematical models are examined to identify their main strengths and limitations. Based on this assessment, a new model is proposed to complement and extend the existing studies in the literature.

To ensure the biological feasibility of the proposed model, the positively invariant region of the system is determined, and the basic reproduction number $\mathcal{R}_0$ is derived using the next-generation matrix method to quantify the epidemic potential of the disease. Subsequently, the disease-free equilibrium and the endemic equilibrium of the system are obtained to analyze the equilibrium behavior of the model. The local stability of these equilibrium points is investigated by means of the Jacobian matrix, and the necessary and sufficient stability conditions are derived using the Routh–Hurwitz criterion.

The analytical results indicate that the basic reproduction number acts as a critical threshold parameter: when $\mathcal{R}_0 < 1$, the disease dies out over time, whereas when $\mathcal{R}_0 > 1$, the disease persists in the population and the system approaches an endemic equilibrium. In addition, a sensitivity analysis is performed to examine the impact of model parameters on the system dynamics.

Finally, numerical simulations are presented to validate the theoretical findings and to illustrate the time-dependent behavior of the model. The simulation results are consistent with the analytical stability analysis and demonstrate that the proposed model yields epidemiologically meaningful outcomes. The findings of this study are expected to contribute to a better understanding of the transmission mechanisms of the monkeypox virus and to support the development of effective disease control strategies.

Keywords: SIR, SEIR, Infectious diseases, Monkeypox

BÖLÜM 1. GİRİŞ

1.1. Temel Bilgiler ve Literatür Taraması

”Epidemioloji(Epidemiology)” kelimesi Yunancadan türemiş olup epi üzeri, demos insan ve logos çalışma demektir. Dolayısı ile bu kelime insanlar üzerindeki çalışmaları belirtir. Epidemioloji terimi ilk olarak 1802 yılında İspanyol doktor de Villalba tarafından epidemik çalışmaları tanımlamak için kullanılmıştır.

Bulaşıcı hastalık, hastalığa yol açan mikrobun varlığı ile sonuçlanmış ve kliniksel olarak kanıtlanmış hastalıklara verilen isimdir. Hastalığa sebep olan bu mikroplar bakteri, virüs, mantarın yanısıra prion olarak adlandırılan zehirli bir protein olabilir. Bakteriyel hastalıklar kan zehirlenmesi, zatürre, menenjit gibi örnekler verilebilir. Öte yandan viral enfeksiyonlara örnek su çiçeği, ebola, covid, hepatit, influenza ve difteri verilebilir [1].

Bu çalışmamızda daha çok MÇV üzerinde duracağız. Variola virüsü ile bağlantılı olan MÇV, Singapur’dan alınmış iki sinomolgus maymununun, Kopenhag Statens Serum Enstitüsünde çalışan Preben von Magnus ve çalışma arkadaşları tarafından incelenmesi ile ilk olarak 1959 yılında belirlenmiştir. Sonraki yıllarda, Avrupa ve Amerika’daki hayvanat bahçelerinde birkaç salgın bildirilmiştir [2].

Dünya Sağlık Örgütü’nün(DSÖ) 26 Ağustos 2024 tarihli açıklamasına göre maymun çiçeği, MÇV taşıyan biriyle, bulaştırıcı materyallerle veya enfekte hayvanlarla yakın temas yoluyla bulaşabilir. Yakın temas, ten tene (dokunma veya seks gibi) ve ağızdan ağza veya ağızdan cilde teması (öpüşme gibi) içerir ve ayrıca MÇV kapmış olan biriyle yüz yüze olmayı da içerebilir (örneğin, enfeksiyonlu solunum parçacıkları oluşturabilen birbirine yakın konuşma veya nefes alma gibi). Birden fazla cinsel partneri olan kişilerin MÇV edinme riski daha yüksektir. İnsanlar ayrıca giysi veya çarşaf gibi nesnelerden, sağlık hizmetlerinde iğne yaralanmaları yoluyla veya dövme salonları gibi topluluk or-

tamlarında MÇV kapabilirler. Bunlara ek olarak hamilelik veya doğum sırasında virüs bebeğe geçebilir. Hamilelik sırasında MÇV kapmak fetüs veya yeni doğan bebek için tehlikeli olabilir ve hamilelik kaybına, ölü doğuma, yenidoğanın ölümüne veya ebeveyn için komplikasyonlara yol açabilir. MÇV'nin hayvandan insana bulaşması(zoonotik), enfekte hayvanlardan insanlara ısırıklar veya çizikler yoluyla veya avlanma, derisini yüzme, tuzağa düşürme, yemek pişirme, leşlerle oynama veya hayvan yeme gibi faaliyetler sırasında meydana gelir. MÇV'nin yaygın semptomları ateş, baş ağrısı, kas ağrıları, sırt ağrısı, düşük enerji ve şişmiş lenf düğümleri ile 2-4 hafta sürebilen deri döküntüsü veya mukozal lezyonlar olarak ortaya çıkabilir [3].

İlk insan maymun çiçeği vakası, 1968 yılında çiçek hastalığının ortadan kaldırıldığı Demokratik Kongo Cumhuriyeti'nde 9 aylık bir çocuğun çiçek hastalığına benzer bir hastalık geliştirmesiyle 1970 yılında tespit edildi. Seyahatle ilişkili vakaların ve Afrika dışındaki salgınların sınırlı ikincil yayılımı nedeniyle, insandan insana bulaşma verimsiz olarak değerlendirilmiştir. 2000'li yılların başında, maymun çiçeği enfeksiyonları ortaya çıktı ve endemik ülkelerden endemik olmayan ülkelere yayıldı. 2003 yılının ilkbahar sonlarında, Afrika kıtası dışında ilk maymun çiçeği salgını Amerika Birleşik Devletleri'nin orta batısında rapor edildi ve enfekte olmuş çayır köpeklerine maruz kalma ile ilişkilendirildi. 2022 yılının ilkbahar sonlarında, endemik bölgelere seyahat etmemiş kişiler arasında Avrupa ve ABD'de benzeri görülmemiş ancak beklenmedik olmayan bir insan maymun çiçeği salgını yayılmaya başladı [4].

Think Global Health verilerine göre Mayıs 2022'nin ortalarında başlayan son salgınla birlikte ilk MÇV vakaları dünyanın pek çok farklı ülkesinde (Türkiye-30 Haziran, İngiltere-7 Mayıs, Kanada-19 Mayıs, Avustralya-20 Mayıs, Arjantin-27 Mayıs, İsveç-20 Mayıs, İtalya-20 Mayıs) bizzat görülmeye başlandı [5].

DSÖ'nün 26 Ağustos 2024'te yayınladığı yazıya göre, Mayıs 2022'de bir MÇV salgını aniden ortaya çıkmış ve hızla Avrupa, Amerika ve ardından altı DSÖ bölgesine yayılmıştır. Küresel salgın öncelikle eşcinsel, biseksüel ve erkeklerle seks yapan diğer erkekleri etkilemiş ve cinsel ağlar aracılığıyla kişiden kişiye yayılmıştır. 2022 yılında, Sudan Cumhuriyeti'ndeki mülteci kamplarında MÇV salgınları meydana gelmiştir.

2022'den bu yana, Demokratik Kongo Cumhuriyeti'nde de MÇV vakalarında ve ölümlerinde bir artış olmuştur. Ülkenin bazı bölgelerinde, MÇV'nin yeni bir dalı kişiden kişiye yayılmaktadır. Bu yeni dal, 2024 yılının ortalarından itibaren başka ülkelerde de rapor edilmiştir. Ocak 2022 - Ağustos 2024 tarihleri arasında 120'den fazla ülkede mpox rapor edilmiş, 100.000'den fazla laboratuvarca doğrulanmış vaka bildirilmiş ve doğrulanmış vakalar arasında 220'den fazla ölüm gerçekleşmiştir [3].

1.2. SIR Modellemesi

SIR modeli, hastalığın yayıldığı bölgedeki nüfusun önemli bir bölümünü enfekte edip öldürebilen ani salgınlar için kullanılır. Bir popülasyonda hastalık yayıldığında, popülasyonu üç gruba ayırır. Birinci grup sağlıklı ama hastalığa yakalanma riski bulunanlar. Bunlar genellikle *hastalığa duyarlı* grup olarak adlandırılır ve S ile gösterilir. İkinci grubumuz hastalığa yakalanmış ve halen hasta olan gruptur. Bunlar genellikle I ile gösterilir. Son olarak hastalığı yenmiş ve tekrardan hastalığı bulaştırmayan gruptur. Bunlara da *iyileşmiş* denir ve genellikle R ile gösterilir. Modelle ilgili bazı varsayımlar şu şekildedir:

1. Popülasyondaki toplam kişi sayısı sabittir. Yani;

$$N = S + I + R \Rightarrow N' = S' + I' + R' = 0$$

2. Coğrafik ve sosyal homojenlik söz konusudur.
3. Hastalık S ve I bireylerinin arasındaki temas yoluyla yayılır [6].

Epidemik modeller her bir sınıfın dinamiğini anlatan diferansiyel denklemler sistemlerinden oluşur. Literatürde yer alan en basit sistem duyarlı, bulaşıcı ve iyileşmiş bireylerin oluşturduğu sistemlerdir. Örneğin ilk SIR modeli 1927 yılında Kermack ve McKendrick tarafından önerilen modeldir [7].

Şimdi diferansiyel denklemin nasıl elde edildiğinden bahsedelim. Enfekte olmuş bir birey duyarlı başka bir birey ile temas kurduğunda ki bu temas fiziksel olmak zorunda

değildir, duyarlı birey artık enfekte olmuş olur ve duyarlı birey sayısı bir azalırken enfekte olmuş birey sayısı bir artar. Birim zamanda enfekte olmuş birey sayısına epidemiyolojide *birim zamanda hastalıktan etkilenen hasta sayısı(insidans)* denir. Dolayısı ile duyarlı bireylerin oluşturduğu sınıfın değişim oranı " $S'(t) = -insidans$ " ile ifade edilebilir [6]. Şimdi birim zamanda değişen duyarlı birey sayısını nasıl ifade edebiliriz onu tartışacağız. Bir tane enfekte olmuş bireyi ele alalım:

1. Enfekte olmuş bir bireyin birim zamanda yaptığı teması cN ile ifade edelim.
2. Yapılan temasın duyarlı birey ile yapılması olasılığını $\frac{S}{N}$ ile ifade edelim.
3. Dolayısı ile enfekte olmuş bir bireyin hastalığa duyarlı bireyler ile birim zamanda yaptığı teması $cN \frac{S}{N}$ ile ifade ederiz.
4. Fakat duyarlı bir birey ile yapılan her bir temas hastalığı yaymak zorunda olmadığından ve bu temas sonucunda hastalığın bulaşması ile sonuçlanma olasılığına p dersek, o halde birim zamanda enfekte olmuş hastalığa duyarlı bireylerin sayısı pcS ile ifade edebiliriz.
5. Dolayısı ile birim zamanda enfekte olmuş birey sayısını $pcSI$ ile ifade ederiz.

Eğer $\beta = pc$ dersek, o halde hastalığa duyarlı bireylerin zamana göre değişimi

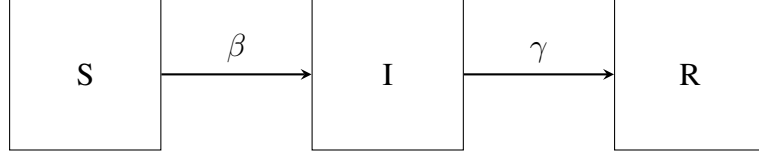
$$S'(t) = -\beta SI$$

olur [6]. Enfekte olmuş hastalığa duyarlı insanlar I sınıfına katılır. O grupta ölen ya da belirli bir γ katsayısı ile iyileşerek R sınıfına katılır. Dolayısı ile sağlıklı, enfekte olmuş ve iyileşen bireylerin birim zamanda değişim oranı

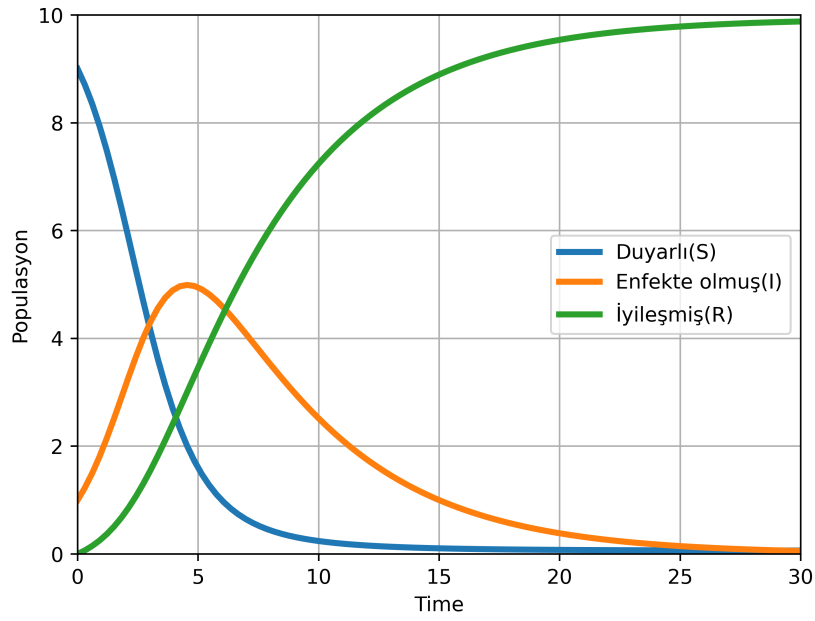
$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I \end{cases} \quad (1.1)$$

diferansiyel denklem sistemi ile ifade edilir. Standart bir SIR modelinin akış diyagramı

ise aşağıdaki gibidir.



(1.1) sisteminin herhangi bir yazılım kullanılarak simülasyonu yapılabilir. Bu modelin simülasyonunu Python kullanarak Şekil 1.1’ de gösterdik.



Şekil 1.1. SIR Modelinin Simülasyonu

Şekil (1.1)’den de görüldüğü gibi, duyarlı insan sayısı zamanla azalırken, enfekte olmuş insan sayısının başlangıçta artıp sonra azaldığı kolayca görülebilir. Son olarak iyileşmiş birey sayısı da zamanla artarak toplam popülasyona ($N = 10$) yakınsadığı görülür.

Burada akıllara takılan tek soru modelin ne zaman salgına dönüştüğüdür. Bunun cevabını bize enfekte olmuş birey sayısı yani I ’nın türevinin işareti verir. Yani $I'(t) > 0$ ise hastalık salgına dönüşür. $I'(t) \leq 0$ ise hastalık salgına dönüşmez. SIR modeli (1.1) sisteminin ikinci denkleminde $I'(t) = \beta IS - \gamma I \Rightarrow I'(t) = I(\beta S - \gamma)$ olur. $I(t) > 0$ olduğunu göz önünde bulundurursak;

$$S < \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow I'(t) < 0$$

$$S = \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow I'(t) = 0$$

$$S > \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow I'(t) > 0$$

durumları elde edilir. Öte yandan $S'(t) < 0$ olduğundan $S(t)$ azalır. Dolayısı ile $S(0) < \frac{\gamma}{\beta} \Rightarrow S(t) < \frac{\gamma}{\beta}$ olur. O halde $I'(t) < 0$ olur. Bundan dolayı $\frac{\gamma}{\beta}$ bir eşik değeridir. Yani $\mathcal{R}_0 = \frac{\gamma}{\beta}$ olarak bulunur. $\mathcal{R}_0$ sayısının 1' den büyük, küçük veya eşit olması bize hastalığın yayılımı hakkında bilgi verir [8].

1.3. Demografik Yapılı SIR modeli

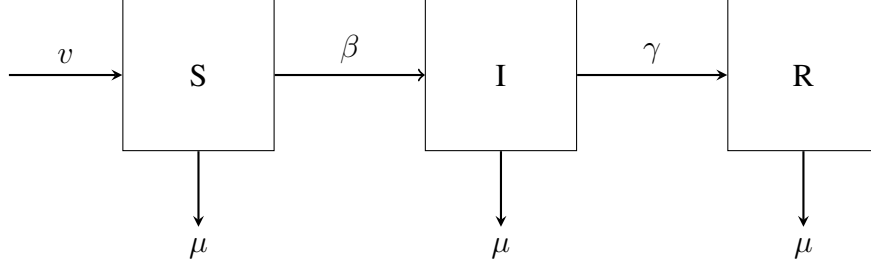
İnsan popülasyonlarının büyümesini ve değişimini inceleyen bilim dalına *demografi* denir. Hepatit-C, HIV ve tüberküloz gibi uzun bir sürece yayılan ve yavaş gelişen hastalıklarda, popülasyondaki değişim sabit kalmaz. Bu tür hastalıklarda nüfus değişimi göz ardı edilemez. Demografiyi modele dahil etmek için tüm bireylerin doğuştan hastalığa duyarlı olduklarını varsayıyoruz. Örneğin

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = vN - \beta IS - \mu S \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R \end{cases}$$

diferansiyel denklem sisteminin sağ ve sol tarafını taraf tarafa toplarsak

$$N'(t) = S'(t) + I'(t) + R'(t) = vN - \mu(S + I + R) = N(v - \mu) \neq \text{sabit}$$

elde edilir. Görüldüğü üzere popülasyondaki değişim sabit değildir. Demografik yapıları bir SIR modelinin akış diyagramı ise aşağıdaki gibidir.



1.4. Temel Matematiksel Bilgiler

Bu bölümde tezde kullanılan matematiksel kavramları vereceğiz.

Tanım 1.1. En az bir bağımlı değişken, sadece bir bağımsız değişken ve bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren diferansiyel denkleme *adi diferansiyel denklem* denir.

Tanım 1.2. Adi diferansiyel denklemlerden oluşan ve direkt olarak bağımsız değişkenlere bağlı olmayan

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.2)$$

sisteme *otonom diferansiyel denklemler sistemi* denir.

Burada (1.2) modelini

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

şeklinde yazarsak, $f \in \mathbb{R}^n$ için

$$x' = f(x) \quad (1.3)$$

elde ederiz. Burada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve f 'in türevlerini sürekli bir fonksiyon olarak ve yerel Lipschitz şartını sağladığını kabul ediyoruz.

Tanım 1.3. (1.3) sistemini ve $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $x(t_0) = x_0$ başlangıç değerini ele alalım.

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.4)$$

sistemine *başlangıç değer problemi* denir.

Tanım 1.4. (1.4) sistemini, t_0 noktasını içeren bir I aralığında sağlayan, sürekli türemlenebilir fonksiyona bu sistemin *çözümü* denir.

Şimdi (1.4) sisteminin çözümünün varlığını garanti eden teoremi aşağıda veriyoruz [9].

Teorem 1.5 (Varlık ve Teklik Teoremi). $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $t_0 \in \mathbb{R}$ ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için (1.4) başlangıç değer probleminin t_0 'ı içeren aralıkta bir çözümü vardır. Ayrıca f fonksiyonunun $x_1, x_2, \dots, x_n$ ' e göre kısmi türevleri $\mathbb{R}^n$ üzerinde var ve sürekli ise, (1.4) otonom sisteminin tek bir çözümü vardır.

Tanım 1.6. (1.3) diferansiyel denklem sisteminde, $f(x^*) = 0$ denklemini sağlayan, x^* çözümüne sistemin denge noktası veya kritik noktası denir.

Şimdi (1.3) sisteminin kararlılığını inceleyen tanım aşağıdaki şekilde verelim [10].

Tanım 1.7. (1.3) sisteminin denge noktası $x^* \in \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer

(a) her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ ise, (1.3) diferansiyel denklem sistemi kararlıdır denir.

(b) (1.3) diferansiyel denklem sistemi kararlı değil ise *kararsızdır* denir.

(c) (1.3) diferansiyel denklem sistemi kararlı ve buna ek olarak

$$\|x(0) - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ var ise, (1.3) sistemi asimptotik kararlıdır denir.

Şimdi sonuçlarımız kullanacağımız bazı formül ve teoremleri verelim [9].

Teorem 1.8 (Sabitin Değişim Teoremi). $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ve $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $-\infty \leq a < b \leq \infty$ için sürekli olsun. Bu durumda $t_0 \in (a, b)$ ve $x_0 \in \mathbb{R}$ için

$$x' = p(t)x + q(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.5)$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$x(t) = e^{\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau} x_0 + e^{\int_{t_0}^t p(\tau) d\tau} \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s p(\tau) d\tau} q(s) ds \quad (1.6)$$

şeklinde verilir.

Tanım 1.9 (Jacobi Matrisi). Model (1.2) için

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

matrisine (1.2) sisteminin *Jacobi Matrisi* denir [10].

Şimdi (1.2) sisteminin kararlılığını, sistemin *Jacobi Matrisi* yardımıyla bize gösteren *Routh–Hurwitz* kriterini aşağıda verelim [11].

Teorem 1.10 (Routh–Hurwitz Kriteri). Aşağıdaki polinom ele alınsın:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n,$$

burada $i = 1, \dots, n$ için a_i katsayılarının her birisi reel sabitlerdir. Karakteristik polinomun katsayılarını kullanarak n adet Hurwitz matrisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix},$$

ve genel olarak,

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix},$$

olmak üzere $j > n$ ise $a_j = 0$ olur. $P(\lambda)$ polinomunun tüm kökleri negatif ya da negatif reel kısma sahip olması için gerek ve yeter koşul tüm Hurwitz matrislerinin determinantlarının pozitif olmasıdır:

$$\det H_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Polinom dereceleri $n = 2, 3, 4, 5$ için Routh–Hurwitz kriteri aşağıdaki gibidir.

$$n = 2 : \quad a_1 > 0 \text{ ve } a_2 > 0.$$

$$n = 3 : \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \text{ ve } a_1 a_2 > a_3.$$

$$n = 4 : \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0, \text{ ve } a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4.$$

$$n = 5 : \quad a_i > 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \quad a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4, \text{ ve}$$

$$(a_1 a_4 - a_5)(a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4) > a_5(a_1 a_2 - a_3)^2 + a_1 a_5.$$

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

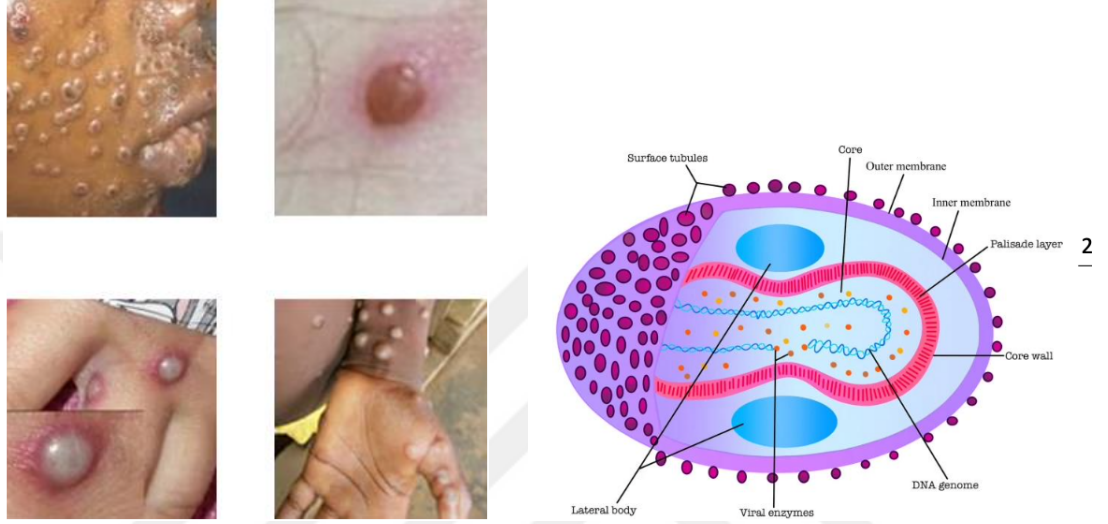
2.1. Giriş ve Literatür Taraması

Çiçek hastalığının yok olması sonrasında insanlarda görülen en önemli Ortopoksvirüs enfeksiyonu haline gelen maymun çiçeği virüsü, Poksviridae ailesinin bir üyesidir. Orta ve Batı Afrika’da yaygın olarak görülen, çift sarmallı DNA’ya sahip, zarflı zoonotik bir virüstür. Bu virüsün Batı Afrika ve Kongo Havzası (Orta Afrika) olmak üzere iki farklı varyantı bulunmaktadır. Klinik ve epidemiyolojik verilere göre Batı Afrika suş’u daha hafif kliniğe sahip hastalıkla ilişkilidir [12].

Maymun çiçeği virüsü ilk olarak 1958 yılında Danimarka’da Statens Serum enstitüsünde bulunan bir maymunda tespit edildi. İnsanlarda ise 1970 yıllarında Batı ve Orta Afrika’da bildirildi. Bu yıllar zaten çiçek virüsünün bölgeden temizlendiği yıllardı. Sonrasında Dünya Sağlık Örgütü(DSÖ)’nün 1970-1986 yılları arasındaki araştırmaları maymun çiçeği virüsünün %10 – %17 arasında bir ölüm oranı olduğunu gösterdi. 1996-1997 ve 2001-2004 yılları arasında Demokratik Kongo Cumhuriyeti’nde çok geniş bir maymun çiçeği virüsü salgını rapor edildi. İlk salgında ölüm oranı %1.5 iken, ikinci salgında bu oran %78’e kadar yükselmiştir. Bu yüksek oranın sebebi, zorunlu olan su çiçeği aşısı yapılmadığında bağışıklık sistemini zayıflatmasıdır [13].

Maymun çiçeği virüsü ilk olarak enfeksiyon bölgesinde yani lokal olarak tespit edilir. Bu bölgede virüsün çoğalması ile yoğun bir şişkinlik oluşur. Oluşan şişkinliğin sonucu olarak hücre nekrozu, fagositoz, vaskülit gibi erken reaksiyonlar ortaya çıkabilir. Bu erken reaksiyonlar, virüsün bölgesel lenfatikler ve vasküler kanallar yoluyla vücudun diğer bölgelerine taşınmasını sağlayarak birincil viremiyi oluşturur. Virüs lenf ve kan damarları ile bölgesel lenf düğümleri, dalak, bademcikler ve kemik iliğine taşınır. Bu organlar, virüsün çoğalmasını sağlayan ikincil bölgeleri oluşturur ve buralardan

salınan çok sayıda virüs ikincil viremiyi oluşturur. Bu süreç 12-14 günlük inkübasyon periyodunu ve arkasından gelen 1-3 günlük ateşli dönemi kapsamaktadır. Muhtemelen bu aşamada virüs, üçüncül hedef organlara (cilt, testisler vb.) taşınır ve bu da klinik olarak tanınabilir hastalık ile sonuçlanır [12]. Aşağıdaki görsellerde MÇV kapmış bireylerin derilerindeki lezyonları ve MÇV'nin yapısını görebilirsiniz [14, 15].



Şekil 2.1. Derideki Maymun Çiçeği Virüsü Lezyonları ve Yapısı [14, 15]

Maymun çiçeği virüsünün modellenmesinde standart SIR modeline göre daha fazla değişkene ve bileşene yer verilmiştir. Virüse ait en yaygın kullanılan diferansiyel denklemler sistemi ve akış diyagramı aşağıdaki gibidir [16].

$$\begin{cases} \frac{dS_k}{dt} = \Lambda_k - \left(\mu_k + \frac{\beta_{k_1} I_k}{N_k} \right) S_k \\ \frac{dI_k}{dt} = \frac{\beta_{k_1} I_k S_k}{N_k} - (\gamma_k + \mu_k + d_k) I_k \\ \frac{dR_k}{dt} = \gamma_k I_k - \mu_k R_k \\ \frac{dS_i}{dt} = \Lambda_i - \left(\mu_i + \frac{\beta_i I_k}{N_k} + \frac{\beta_{k_2} I_i}{N_i} \right) S_i \\ \frac{dI_i}{dt} = \left(\frac{\beta_i I_k}{N_k} + \frac{\beta_{k_2} I_i}{N_i} \right) S_i - (\gamma_i + \mu_i + d_i) I_i \\ \frac{dR_i}{dt} = \gamma_i I_i - \mu_k R_i. \end{cases} \quad (2.1)$$

Burada μ_k kemirgen popülasyonunda yaşanan doğal ölümlerin oranı, μ_i insan popü-

lasyonunda yaşanan doğal ölümlerin oranı, d_k kemirgenlerde meydana gelen hastalık sebepli ölümlerin oranı, d_i insan popülasyonunda meydana gelen, hastalık sebepli ölümlerin oranıdır. (2.1) sisteminden

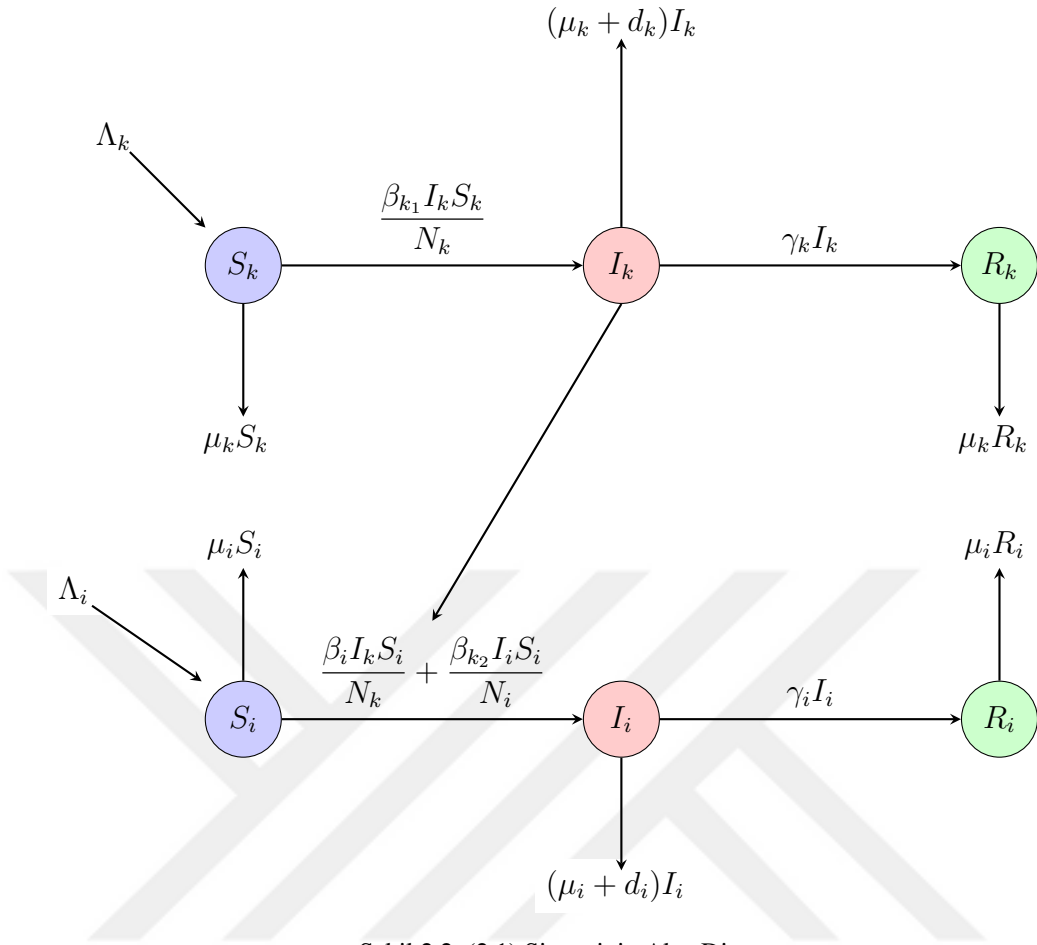
$$\frac{dN_k}{dt} = \Lambda_k - \mu_k N_k - d_k I_k \quad (2.2)$$

$$\frac{dN_i}{dt} = \Lambda_i - \mu_i N_i - d_i I_i \quad (2.3)$$

olduğu kolayca görülür. Bu da (2.1) sisteminin demografik yapılı olduğunu gösterir.

TeWinkel çalışmasında maymun çiçeği için şüana kadar yalnızca üç matematiksel model önerildiğinden ve incelendiğinden bahsetmiştir. Daha önce tamamlanmamış olan endemik denge noktasının global asimptotik kararlılığını Lyapunov fonksiyonu yardımıyla kanıtlamıştır. Bu modeli, temas oranının yalnızca bir sabit değil, zamanın bir fonksiyonu olduğu bir durumu içerecek şekilde genişletmiş ve ardından modelin ikiden fazla popülasyonla genişletilmesini ele almıştır. Ardından, orijinal model ve değiştirilmiş modeller için sayısal simülasyonların sonuçlarını sunmuştur [17].

Şekil (2.2)'de (2.1) sisteminin akış şemasını görebilirsiniz.



Şekil 2.2. (2.1) Sisteminin Akış Diyagramı

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Maymun Çiçeği Virüsünün Matematiksel Modellemesi

Bu bölümde MÇV'nin yaygın kullanılan modeline ek olarak insan alt grubuna 3 yeni sınıf ekliyoruz. Bu sınıflardan ikisi kuluçka dönemi sınıfı ve karantina sınıfıdır. Son olarak hastalığa duyarlı insanlar sınıfını bilinçliler ve bilinçsizler olarak iki ayrı sınıfa ayırıyoruz. Bilinçli olan insanların hastalığı kemirgenlerden değil sadece insanlardan kapıldığı ve sadece bilinçli insanların bir kısmının kendisini karantinaya aldığı kabul edilmiştir. Hastalığa duyarlı insanlar sınıfını iki sınıfa ayırmaktaki ana fikir, iki grubun zamana bağlı değişimlerdeki farklılıkları uzun vadede gözlemlemektir.

Aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_{i_1} = \Lambda_1 - \beta_1 I_i S_{i_1} - \beta_3 S_{i_1} - d_i S_{i_1} \\ S'_{i_2} = \Lambda_2 - \beta_2 I_i S_{i_2} - \alpha_3 I_k S_{i_2} - d_i S_{i_2} \\ E'_i = \beta_1 I_i S_{i_1} + \beta_2 I_i S_{i_2} + \alpha_3 I_k S_{i_2} - (d_i + \beta_4) E_i \\ I'_i = \beta_4 E_i - (\beta_6 + \mu_1 + d_i) I_i \\ Q' = \beta_3 S_{i_1} - (\beta_5 + d_i) Q \\ R'_i = \beta_6 I_i + \beta_5 Q - d_i R_i \\ S'_k = \Lambda_3 - \alpha_1 I_k S_k - d_k S_k \\ I'_k = \alpha_1 I_k S_k - (\mu_2 + \alpha_2 + d_k) I_k \\ R'_k = \alpha_2 I_k - d_k R_k \end{array} \right. \quad (3.1)$$

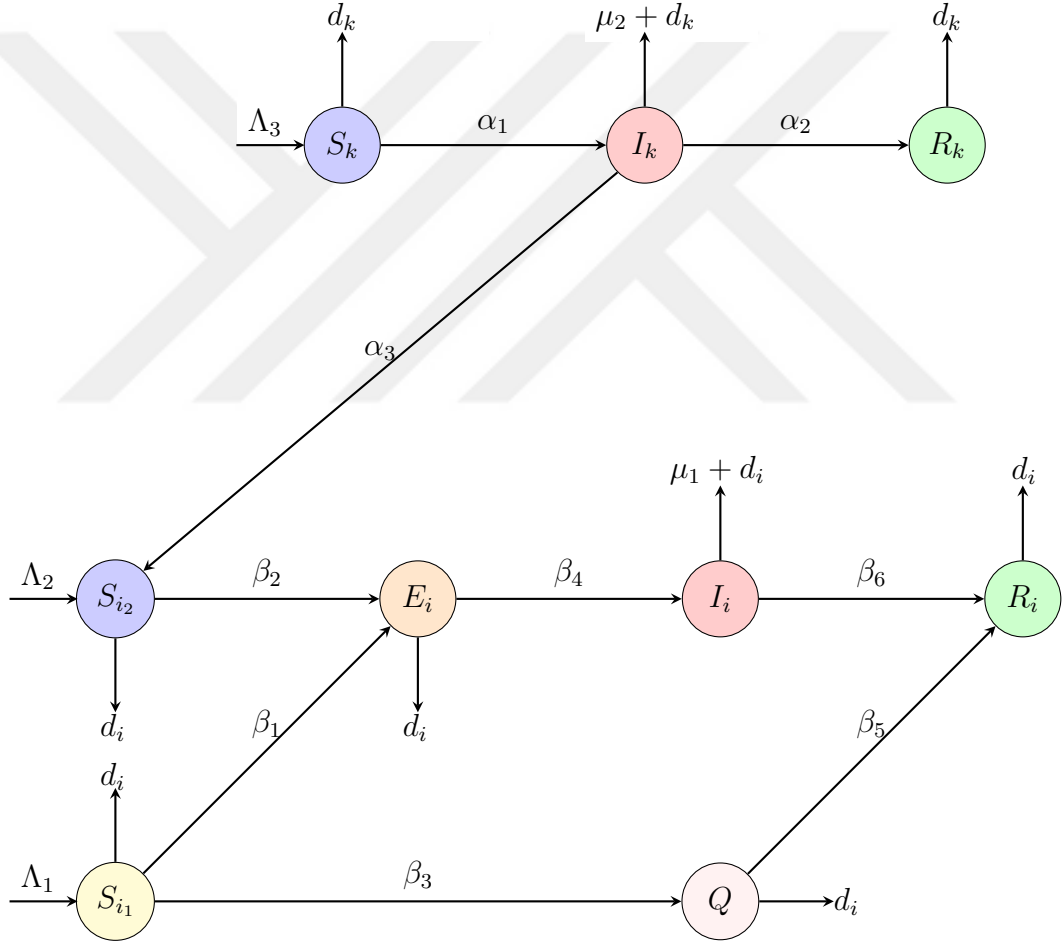
Burada μ_2 kemirgen popülasyonunda yaşanan hastalık sebebiyle ölümlerin oranı, d_k kemirgen popülasyonunda yaşanan doğal ölümlerin oranı, μ_1 karantinada olmayan

insanlarda meydana gelen hastalık sebebi ölümünün oranı ve d_i insan popülasyonunda meydana gelen doğal ölümlerin oranıdır. (3.1) sisteminden;

$$N'_i = \Lambda_1 + \Lambda_2 - d_i N_i - \mu_1 I_i \quad (3.2)$$

$$N'_k = \Lambda_3 - d_k N_k - \mu_2 I_k \quad (3.3)$$

olduğundan (3.1) sistemimizin demografik yapısı olduğu görülür. Şimdi sistemimizin akış diyagramını aşağıdaki şekilde verelim.



Teorem 3.1. *Başlangıç koşullarının bir Ω bölgesinde tanımlı olduğunu varsayarsak, bu durumda (3.1)'de verilen diferansiyel denklem sisteminin her $t \in [0, T]$ aralığında $N_k(0) > 0$ ve $N_i(0) > 0$ için Ω bölgesinde pozitif ve sınırlı tek bir çözümü vardır.*

Burada

$$\Omega = \left\{ (S_{i_1}, S_{i_2}, E_i, I_i, Q, R_i, S_k, I_k, R_k) \in \mathbb{R}_+^9 : 0 < N_i \leq \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{d_i}, 0 < N_k \leq \frac{\Lambda_3}{d_k} \right\}$$

kümesi ile tanımlıdır.

İspat. (3.1) sisteminden elde ettiğimiz (3.2) ve (3.3)'yü kullanalım;

$$\begin{aligned} N'_i &= \Lambda_1 + \Lambda_2 - d_i N_i - \mu_1 I_i \leq \Lambda_1 + \Lambda_2 - d_i N_i \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} N'_i &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \{ \Lambda_1 + \Lambda_2 - d_i N_i \} \\ 0 &\leq \Lambda_1 + \Lambda_2 - d_i \limsup_{t \rightarrow \infty} N_i \\ N_i &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} N_i \leq \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{d_i} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N'_k &= \Lambda_3 - d_k N_k - \mu_2 I_k \leq \Lambda_3 - d_k N_k \\ \limsup_{t \rightarrow \infty} N'_k &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \Lambda_3 - d_k N_k \\ 0 &\leq \Lambda_3 - d_k \limsup_{t \rightarrow \infty} N_k \\ N_k &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} N_k \leq \frac{\Lambda_3}{d_k} \end{aligned}$$

olur. Şimdi çözümün pozitif olduğunu göstermek için şu adımları izleyelim;

$$\begin{aligned}
N'_i &= \Lambda_1 + \Lambda_2 - d_i N_i - \mu_1 I_i \geq \Lambda_1 + \Lambda_2 - (d_i + \mu_1) N_i \\
e^{(d_i + \mu_1)t} N'_i &\geq (\Lambda_1 + \Lambda_2) e^{(d_i + \mu_1)t} - e^{(d_i + \mu_1)t} (d_i + \mu_1) N_i \\
e^{(d_i + \mu_1)t} N'_i + e^{(d_i + \mu_1)t} (d_i + \mu_1) N_i &\geq (\Lambda_1 + \Lambda_2) e^{(d_i + \mu_1)t} \\
(e^{(d_i + \mu_1)t} N_i)' &\geq (\Lambda_1 + \Lambda_2) e^{(d_i + \mu_1)t} \\
\int_0^t (e^{(d_i + \mu_1)s} N_i)' ds &\geq \int_0^t (\Lambda_1 + \Lambda_2) e^{(d_i + \mu_1)s} ds \\
N_i e^{(d_i + \mu_1)t} - N_i(0) e^0 &\geq (\Lambda_1 + \Lambda_2) \int_0^t (e^{(d_i + \mu_1)s}) ds \\
N_i e^{(d_i + \mu_1)t} &\geq N_i(0) + (\Lambda_1 + \Lambda_2) \int_0^t e^{(d_i + \mu_1)s} ds > 0.
\end{aligned}$$

Bu bize $N_i > 0$ olduğunu gösterir.

Benzer şekilde aynı adımlar takip edilirse;

$$\begin{aligned}
N'_k &= \Lambda_3 - d_k N_k - \mu_2 I_k \geq \Lambda_3 - (d_k + \mu_2) N_k \\
e^{(d_k + \mu_2)t} N'_k &\geq \Lambda_3 e^{(d_k + \mu_2)t} - e^{(d_k + \mu_2)t} (d_k + \mu_2) N_k \\
e^{(d_k + \mu_2)t} N'_k + e^{(d_k + \mu_2)t} (d_k + \mu_2) N_k &\geq \Lambda_3 e^{(d_k + \mu_2)t} \\
(e^{(d_k + \mu_2)t} N_k)' &\geq \Lambda_3 e^{(d_k + \mu_2)t} \\
\int_0^t (e^{(d_k + \mu_2)s} N_k)' ds &\geq \int_0^t (\Lambda_3 e^{(d_k + \mu_2)s}) ds \\
N_k e^{(d_k + \mu_2)t} - N_k(0) e^0 &\geq \Lambda_3 \int_0^t (e^{(d_k + \mu_2)s}) ds \\
N_k e^{(d_k + \mu_2)t} &\geq N_k(0) + \Lambda_3 \int_0^t e^{(d_k + \mu_2)s} ds > 0
\end{aligned}$$

$N_k > 0$ olması gerektiği görülür. O halde (3.1) sisteminin tüm çözümleri her $t \in [0, T]$ için aşağıdaki pozitif sınırlı Ω bölgesi içinde olmalıdır;

$$\Omega = \left\{ (S_{i_1}, S_{i_2}, E_i, I_i, Q, R_i, S_k, I_k, R_k) \in \mathbb{R}_+^9 : 0 < N_i \leq \frac{\Lambda_1 + \Lambda_2}{d_i}, 0 < N_k \leq \frac{\Lambda_3}{d_k} \right\}$$

□

3.2. Hastalığın Olmadığı Denge Noktasının Kararlılık Analizi

Bir sonraki adım için (3.1) sisteminin hastalıksız denge noktasını hesaplayalım. Bunun için (3.1)'de S_{i_1}, S_{i_2}, S_k hariç tüm popülasyon terimlerin yerine sıfır yazmalıyız.

$$\mathcal{E}_0 = (S_{i_1}^*, S_{i_2}^*, E_i^*, I_i^*, Q^*, R_i^*, S_k^*, I_k^*, R_k^*) = \left(\frac{\Lambda_1}{\beta_3 + d_i}, \frac{\Lambda_2}{d_i}, 0, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_3}{d_k}, 0, 0 \right) \quad (3.4)$$

Teorem 3.2. Ω bölgesinde, (3.1) sisteminin temel üreme katsayıları;

$$\mathcal{R}_{0_i} = \frac{(\beta_1 \Lambda_1 d_i + \beta_2 \Lambda_2 (\beta_3 + d_i)) \beta_4}{(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i)(\beta_3 + d_i) d_i} \quad \mathcal{R}_{0_k} = \frac{\alpha_1 \Lambda_3}{(\mu_2 + \alpha_2 + d_k) d_k}$$

şeklindedir.

İspat. Şimdi hastalığın temel üreme katsayıları olan $\mathcal{R}_{0_i}, \mathcal{R}_{0_k}$ sayılarını bulabilmek için, (3.1) sisteminde yeni nesil matris yöntemini kullanacağız [18].

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \beta_1 I_i S_{i_1} + \beta_2 I_i S_{i_2} + \alpha_3 I_k S_{i_2} \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_1 I_k S_k \end{bmatrix} \quad \mathcal{V} = \begin{bmatrix} (d_i + \beta_4) E_i \\ -\beta_4 E_i + (\beta_6 + \mu_1 + d_i) I_i \\ \beta_3 S_{i_1} - (\beta_5 + d_i) Q \\ (\mu_2 + \alpha_2 + d_k) I_k \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 S_{i_1}^* + \beta_2 S_{i_2}^* & 0 & \alpha_3 S_{i_2}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_1 S_k^* \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} \beta_4 + d_i & 0 & 0 & 0 \\ -\beta_4 & \beta_6 + \mu_1 + d_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_5 + d_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 + \alpha_2 + d_k \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_4 + d_i} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_4}{(\beta_4 + d_i)(\beta_6 + \mu_1 + d_i)} & \frac{1}{\beta_6 + \mu_1 + d_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta_5 + d_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu_2 + \alpha_2 + d_k} \end{bmatrix}$$

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{(\beta_1 S_{i_1}^* + \beta_2 S_{i_2}^*)\beta_4}{(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i)} & \frac{\beta_1 S_{i_1}^* + \beta_2 S_{i_2}^*}{\beta_6 + \mu_1 + d_i} & 0 & \frac{\alpha_3 S_{i_2}^*}{\mu_2 + \alpha_2 + d_k} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha_1 S_k^*}{\mu_2 + \alpha_2 + d_k} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_{0_i} = \frac{(\beta_1 S_{i_1}^* + \beta_2 S_{i_2}^*)\beta_4}{(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i)} \quad \mathcal{R}_{0_k} = \frac{\alpha_1 S_k^*}{\mu_2 + \alpha_2 + d_k}$$

(3.4) denge noktası yerine yazılırsa;

$$\mathcal{R}_{0_i} = \frac{(\beta_1 \frac{\Lambda_1}{\beta_3 + d_i} + \beta_2 \frac{\Lambda_2}{d_i})\beta_4}{(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i)}, \quad \mathcal{R}_{0_k} = \frac{\alpha_1 \frac{\Lambda_3}{d_k}}{\mu_2 + \alpha_2 + d_k}$$

elde edilir. Bunu biraz düzenlersek

$$\mathcal{R}_{0_i} = \frac{(\beta_1 \Lambda_1 d_i + \beta_2 \Lambda_2 (\beta_3 + d_i))\beta_4}{(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i)(\beta_3 + d_i)d_i} \quad \mathcal{R}_{0_k} = \frac{\alpha_1 \Lambda_3}{(\mu_2 + \alpha_2 + d_k)d_k} \quad (3.5)$$

olarak bulunur. Bu şekilde ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.3. $\mathcal{R}_{0_i} < 1$ ve $\mathcal{R}_{0_k} < 1$ için hastalığın olmadığı denge noktası $\mathcal{E}_0$ yerel

asimptotik kararlıdır.

İspat. İspatımızı yaparken Jacobiyan matrisinden yararlanacağız. Bunu yaparken denkleminin sağ tarafını denge noktaları etrafında lineerleştirip, bulunan matrisin özdeğerlerini inceleyeceğiz.

$$J = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} & 0 & 0 & 0 & a_{28} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & a_{38} & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{64} & a_{65} & a_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{77} & a_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{98} & a_{99} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

burada;

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\beta_1 I_i - \beta_3 - d_i, & a_{14} &= -\beta_1 S_{i_1}, & a_{22} &= -\beta_2 I_i - \alpha_3 I_k - d_i, & a_{24} &= -\beta_2 S_{i_2}, \\ a_{28} &= -\alpha_3 S_{i_2}, & a_{31} &= \beta_1 I_i, & a_{32} &= \beta_2 I_i + \alpha_3 I_k, & a_{33} &= -(d_i + \beta_4), \\ a_{34} &= \beta_1 S_{i_1} + \beta_2 S_{i_2}, & a_{38} &= \alpha_3 S_{i_2}, & a_{43} &= \beta_4, & a_{44} &= -(\beta_6 + \mu_1 + d_i), \\ a_{51} &= \beta_3, & a_{54} &= 0, & a_{55} &= -(\beta_5 + d_i), & a_{64} &= \beta_6 \\ a_{65} &= \beta_5, & a_{66} &= -d_i, & a_{77} &= -\alpha_1 I_k - d_k, & a_{78} &= -\alpha_1 S_k, \\ a_{87} &= \alpha_1 I_k, & a_{88} &= \alpha_1 S_k - (\mu_2 + \alpha_2 + d_k), & a_{98} &= \alpha_2, & a_{99} &= -d_k \end{aligned}$$

olur. Şimdi $\mathcal{E}_0 = (S_{i_1}^*, S_{i_2}^*, E_i^*, I_i^*, Q^*, R_i^*, S_k^*, I_k^*, R_k^*) = \left(\frac{\Lambda_1}{\beta_3 + d_i}, \frac{\Lambda_2}{d_i}, 0, 0, 0, 0, \frac{\Lambda_3}{d_k}, 0, 0 \right)$ noktasını yerine yazalım ve yerel kararlılık analizini yapalım;

$$J_{\mathcal{E}_0} - I\lambda = \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & 0 & 0 & b_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} - \lambda & 0 & b_{24} & 0 & 0 & 0 & a_{28} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} - \lambda & b_{34} & 0 & 0 & 0 & b_{38} & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{54} & b_{55} - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{64} & b_{65} & b_{66} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{77} - \lambda & b_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{88} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{98} & b_{99} - \lambda \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} b_{11} &= -di, & b_{14} &= -\beta_1 \frac{\Lambda_1}{\beta_3 + d_i}, & b_{22} &= -d_i, & b_{24} &= -\beta_2 \frac{\Lambda_2}{d_i}, \\ b_{28} &= -\alpha_3 \frac{\Lambda_2}{d_i}, & b_{33} &= -(d_i + \beta_4), & b_{34} &= \beta_1 \frac{\Lambda_1}{\beta_3 + d_i} + \beta_2 \frac{\Lambda_2}{d_i}, & b_{38} &= \alpha_3 \frac{\Lambda_2}{d_i}, \\ b_{43} &= \beta_4, & b_{44} &= -(\beta_6 + \mu_1 + d_i), & b_{54} &= 0, & b_{55} &= -(\beta_5 + d_i), \\ b_{64} &= \beta_6, & b_{65} &= \beta_5, & b_{66} &= -d_i, & b_{77} &= -d_k, \\ b_{78} &= -\alpha_1 \frac{\Lambda_3}{d_k}, & b_{88} &= \alpha_1 \frac{\Lambda_3}{d_k} - (\mu_2 + \alpha_2 + d_k), & b_{98} &= \alpha_2, & b_{99} &= -d_k \end{aligned}$$

şeklinde. Şimdi bu matrisi aşağıdaki gibi blok matris formunda yazalım.

$$J_{\mathcal{E}_0} - I\lambda = \begin{bmatrix} A_{6 \times 6} & B_{6 \times 3} \\ 0_{3 \times 6} & C_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Elde edilen matris üst üçgensel matris olduğundan, A ve C matrislerinin karakteristik polinomları ve özdeğerleri bizim Jacobiyan matrisimizin karakteristik polinom ve

özdeğerlerini verir. Şimdi sırasıyla C ve A matrislerinin özdeğerlerini bulalım.

$$C = \begin{bmatrix} b_{77} - \lambda & b_{78} & 0 \\ 0 & b_{88} - \lambda & 0 \\ 0 & b_{98} & b_{99} - \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \det(C) = (b_{77} - \lambda)(b_{88} - \lambda)(b_{99} - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = b_{77} = -d_k < 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = b_{88} = \alpha_1 \frac{\Lambda_3}{d_k} - (\mu_2 + \alpha_2 + d_k)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_3 = b_{99} = -d_k < 0$$

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & 0 & 0 & b_{14} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} - \lambda & 0 & b_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} - \lambda & b_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{54} & b_{55} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{64} & b_{65} & b_{66} - \lambda \end{bmatrix}$$

Benzer şekilde A matrisinide blok matris formunda yazıp basitleştirelim.

$$A = \begin{bmatrix} D_{4 \times 4} & 0_{4 \times 2} \\ E_{2 \times 4} & F_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

A matrisi üst üçgensel matris olduğundan, D ve F matrislerinin karakteristik polinomları ve özdeğerleri A matrisinin karakteristik polinom ve özdeğerlerini verir. Şimdi sırasıyla F ve D matrislerinin özdeğerlerini bulalım.

$$F = \begin{bmatrix} b_{55} - \lambda & 0 \\ b_{65} & b_{66} - \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \det(F) = (b_{55} - \lambda)(b_{66} - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_4 = b_{55} = -(\beta_5 + d_i) < 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_5 = b_{66} = -d_i < 0$$

$$D = \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & 0 & 0 & b_{14} \\ 0 & b_{22} - \lambda & 0 & b_{24} \\ 0 & 0 & b_{33} - \lambda & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{2 \times 2} & H_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & K_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

D matrisinin özdeğerlerini bulmak için sırasıyla G ve K matrislerinin özdeğerlerini bulacağız.

$$G = \begin{bmatrix} b_{11} - \lambda & 0 \\ 0 & b_{22} - \lambda \end{bmatrix} \Leftrightarrow \det(G) = (b_{11} - \lambda)(b_{22} - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_6 = b_{11} = -d_i < 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_7 = b_{22} = -d_i < 0$$

$$K = \begin{bmatrix} b_{33} - \lambda & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} - \lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \det(K) = \lambda^2 - (b_{33} + b_{44})\lambda + b_{33}b_{44} - b_{43}b_{34} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{8,9} = \frac{1}{2} \left(b_{33} + b_{44} \pm \sqrt{(b_{33} + b_{44})^2 - 4(b_{33}b_{44} - b_{43}b_{34})} \right)$$

Buraya kadar λ_2 ve $\lambda_{8,9}$ özdeğerleri dışındaki diğer özdeğerlerin kesin negatif olduğunu gördük. Şimdi sırasıyla λ_2 ve $\lambda_{8,9}$ özdeğerlerinin hangi koşullarda negatif olduklarını bulalım.

$$\begin{aligned} \lambda_2 = b_{88} = \frac{\alpha_1 \Lambda_3}{d_k} - (\mu_2 + \alpha_2 + d_k) < 0 &\Leftrightarrow \frac{\alpha_1 \Lambda_3}{d_k} < (\mu_2 + \alpha_2 + d_k) \\ &\Leftrightarrow \mathcal{R}_{0_k} = \frac{\alpha_1 \Lambda_3}{(\mu_2 + \alpha_2 + d_k)d_k} < 1 \end{aligned}$$

Diğer yandan $-(b_{33} + b_{44}) > 0$ ve $b_{33}b_{44} > b_{43}b_{34}$ koşulları için, $\lambda_{8,9}$ özdeğerleri

Routh-Hurwitz kriterine göre negatif özdeğerlerdir.

$$\begin{aligned}
-(b_{33} + b_{44}) &= -(-(d_i + \beta_4) - (\beta_6 + 0 + \mu_1 + d_i)) = \beta_4 + \beta_6 + \mu_1 + 2d_i > 0 \\
b_{33}b_{44} > b_{43}b_{34} &\Leftrightarrow (d_i + \beta_4)(\beta_6 + 0 + \mu_1 + d_i) > \beta_4 \left(\beta_1 \frac{\Lambda_1}{\beta_3 + d_i} + \beta_2 \frac{\Lambda_2}{d_i} \right) \\
&\Leftrightarrow 1 > \frac{\beta_4(\beta_1 \Lambda_1 d_i + \beta_2 \Lambda_2 (\beta_3 + d_i))}{(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(d_i + \beta_4)(\beta_3 + d_i)d_i} = \mathcal{R}_{0_i} \\
&\Leftrightarrow \mathcal{R}_{0_i} < 1
\end{aligned}$$

Bu sonuçlarla birlikte ispat tamamlanmış olur. □

3.3. Hastalığın Olduğu Denge Noktası ve Kararlılık Analizi

Bu bölümde hastalığın olduğu denge noktasını ve onun kararlılık analizini yapacağız.

Bu nedenle aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.4. $I_i > 0$ ve $I_k > 0$ için (3.1) modelinin $\mathcal{E}_1 = (S_{i_1}^*, S_{i_2}^*, E_i^*, I_i^*, Q^*, R_i^*, S_k^*, I_k^*, R_k^*)$ şeklinde tek bir endemik denge noktası vardır.

İspat. (3.1) sistemindeki bütün denklemler sırasıyla sıfıra eşitlenirse ve düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
I'_k &= \alpha_1 I_k S_k - (\mu_2 + \alpha_2 + d_k) I_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 I_k S_k = (\mu_2 + \alpha_2 + d_k) I_k \\
&\Leftrightarrow \alpha_1 S_k = \mu_2 + \alpha_2 + d_k \Leftrightarrow S_k^* = \frac{\mu_2 + \alpha_2 + d_k}{\alpha_1} \\
S'_k + I'_k &= \Lambda_3 - d_k S_k^* - (\mu_2 + \alpha_2 + d_k) I_k^* \Leftrightarrow \Lambda_3 - d_k S_k^* = (\mu_2 + \alpha_2 + d_k) I_k^* \\
&\Leftrightarrow I_k^* = \frac{\Lambda_3 - d_k S_k^*}{\mu_2 + \alpha_2 + d_k} \Leftrightarrow I_k^* = \frac{\alpha_1 \Lambda_3 - d_k (\mu_2 + \alpha_2 + d_k)}{(\mu_2 + \alpha_2 + d_k) \alpha_1} \\
R'_k &= \alpha_2 I_k - d_k R_k = 0 \Leftrightarrow \alpha_2 I_k = d_k R_k \Leftrightarrow R_k^* = \frac{\alpha_2}{d_k} I_k^* \\
&\Leftrightarrow R_k^* = \frac{\alpha_2 (\alpha_1 \Lambda_3 - d_k (\mu_2 + \alpha_2 + d_k))}{(\mu_2 + \alpha_2 + d_k) \alpha_1 d_k}
\end{aligned}$$

Hayvan alt sisteminin denge noktaları bu şekilde bulunur. Şimdi insan alt sisteminin denge noktalarını elde etmek için, insan alt sistemini bir bütün olarak ele almamız gerekiyor. Bunun asıl sebebi I_i^* noktasını elde edebilmek için E_i^* 'dan faydalanacak

olmamızdır. Bu bilgiler ışığında şu adımları izleyelim.

$$\left\{ \begin{array}{l} S'_{i_1} = 0 \Leftrightarrow S_{i_1}^* = \frac{\Lambda_1}{\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i} \\ S'_{i_2} = 0 \Leftrightarrow S_{i_2}^* = \frac{\Lambda_2}{\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^* + d_i} \\ E'_i = 0 \Leftrightarrow E_i^* = \frac{\beta_1 I_i^* S_{i_1}^* + (\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^*) S_{i_2}^*}{\beta_4 + d_i} \\ I'_i = 0 \Leftrightarrow I_i^* = \frac{\beta_4}{\beta_6 + \mu_1 + d_i} E_i^* \\ Q' = 0 \Leftrightarrow Q^* = \frac{\beta_3 S_{i_1}^*}{\beta_5 + d_i} \\ R'_i = 0 \Leftrightarrow R_i^* = \frac{\beta_6 I_i^* + \beta_5 Q^*}{d_i} \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Şimdi (3.7)'da 3. eşitliği 4. eşitlikte yerine yazalım ve düzenleme yapmaya devam edelim;

$$\begin{aligned} I_i^* = \frac{\beta_4}{\beta_6 + \mu_1 + d_i} E_i^* &\Leftrightarrow I_i^* = \frac{\beta_4(\beta_1 I_i^* S_{i_1}^* + \beta_2 I_i^* S_{i_2}^* + \alpha_3 I_k^* S_{i_2}^*)}{(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i)} \\ &\Leftrightarrow I_i^*(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i) = \beta_4(\beta_1 I_i^* S_{i_1}^* + (\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^*) S_{i_2}^*) \end{aligned}$$

Şimdi (3.7)'daki 1 ve 2. eşitliği yerine yazalım;

$$\begin{aligned} I_i^*(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i) &= \beta_4 \left(\frac{\Lambda_1 \beta_1 I_i^*}{\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i} + \frac{\Lambda_2 (\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^*)}{\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^* + d_i} \right) \Leftrightarrow \\ I_i^*(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i) - \beta_4 \left(\frac{\Lambda_1 \beta_1 I_i^*}{\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i} + \frac{\Lambda_2 (\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^*)}{\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^* + d_i} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Burada göze çarpan ilk şey (3.8) eşitliğini çözmeye çalıştığımızda karşımıza üçüncü mertebeden bir denklemin gelecek olmasıdır. Dolayısıyla bunu çözmek ilk başta çok zahmetli olacağından öncelikle I_i^* 'nin tek bir reel çözümünün olduğunu aşağıdaki şekilde gösterelim;

$$\phi(I_i^*) = I_i^*(\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i) - \beta_4 \left(\frac{\Lambda_1 \beta_1 I_i^*}{\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i} + \frac{\Lambda_2 (\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^*)}{\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^* + d_i} \right)$$

olsun. $I_k^* > 0$ olacağından burda;

$I_i^* \rightarrow 0^+$ için $\phi(0^+) = -\beta_4 \Lambda_2 \frac{\alpha_3 I_k^*}{\alpha_3 I_k^* + d_i} < 0$ ve $I_i^* \rightarrow \infty$ için $\phi(I_i^*) \rightarrow \infty$ olur.

Ayrıca;

$$\begin{aligned} \phi'(I_i^*) &= (\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i) \\ &\quad - \beta_4 \left(\frac{\Lambda_1 \beta_1 (\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i) - \beta_1 (\Lambda_1 \beta_1 I_i^*)}{(\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Lambda_2 \beta_2 (\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^* + d_i) - \beta_2 \Lambda_2 (\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^*)}{(\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^* + d_i)^2} \right) \\ &= (\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i) - \beta_4 \left(\frac{\Lambda_1 \beta_1 (\beta_3 + d_i)}{(\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i)^2} + \frac{\Lambda_2 \beta_2 d_i}{(\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^* + d_i)^2} \right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Yeterince büyük I_i^* değerleri için; $\phi'(I_i^*) > 0$ olur. Ayrıca ϕ fonksiyonunun ikinci türevini de incelersek;

$$\phi''(I_i^*) = \frac{2\beta_4 \Lambda_1 \beta_1^2 (\beta_3 + d_i)}{(\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i)^3} + \frac{2\beta_4 \Lambda_2 \beta_2^2 d_i}{(\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^* + d_i)^3}$$

olur. Her iki terim de pozitif terimlerin çarpımlarından oluşmaktadır ve paydalarıda daima pozitifdir. O halde her $I_i^* > 0$ için $\phi''(I_i^*) > 0$ olur.

Sonuç olarak $\phi(I_i^*)$ fonksiyonu dışbükeydir (convex) ve türevi artan bir fonksiyondur. O halde $\phi(I_i^*)$ fonksiyonunun sadece ve sadece bir reel kökü vardır. Şimdi bu kökü sembolik olarak bulalım, işlem kolaylığı açısından (3.8) eşitliğinde şu dönüşümleri yapıp biraz düzenlersek;

$$\begin{aligned}
A_1 &= \beta_3 + d_i \quad A_2 = \alpha_3 I_k^* + d_i \quad A_3 = (\beta_6 + \mu_1 + d_i)(\beta_4 + d_i) \\
I_i^* A_3 (\beta_1 I_i^* + A_1) (\beta_2 I_i^* + A_2) \\
&- \beta_4 \left(\Lambda_1 \beta_1 I_i^* (\beta_2 I_i^* + A_2) + \Lambda_2 (\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^*) (\beta_1 I_i^* + A_1) \right) = 0
\end{aligned}$$

olur. Bu ifade açılıp düzenlenirse elimizde üçüncü dereceden bir polinom olur;

$$a_3 I_i^{*3} + a_2 I_i^{*2} + a_1 I_i + a_0 = 0$$

burada;

$$\begin{aligned}
a_3 &= A_3 \beta_1 \beta_2 \\
a_2 &= A_3 (\beta_1 A_2 + \beta_2 A_1) - \beta_4 (\Lambda_1 + \Lambda_2) \beta_1 \beta_2 \\
a_1 &= A_3 A_2 A_1 - \beta_4 (\Lambda_1 \beta_1 A_2 + \Lambda_2 \beta_2 A_1 + \Lambda_2 \alpha_3 I_k^* \beta_1) \\
a_0 &= -\beta_4 \Lambda_2 \alpha_3 I_k^* A_1
\end{aligned}$$

olur. Denklemi monik hale getirelim.

$$I_i^{*3} + m I_i^{*2} + n I_i^* + k = 0$$

Burada

$$m = \frac{a_2}{a_3}, \quad n = \frac{a_1}{a_3}, \quad k = \frac{a_0}{a_3}$$

şeklindedir. Şimdi bu denkleme $I_i^* = y - \frac{m}{3}$ dönüşümü uygularsak denklem şu forma gelir.

$$y^3 + py + q = 0$$

Burada

$$p = n - \frac{m^2}{3}, \quad q = \frac{2m^3}{27} - \frac{mn}{3} + k$$

şeklindedir. Bu denklemin diskriminantı şu şekildedir.

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

(3.8) denkleminin sadece bir reel kökü olduğunu bildiğimiz için çözümü şu şekilde yazabiliriz [19].

$$I_i^* = -\frac{m}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}$$

O halde (3.1) sisteminin $\mathcal{E}_1 = (S_{i_1}^*, S_{i_2}^*, E_i^*, I_i^*, Q^*, R_i^*, S_k^*, I_k^*, R_k^*)$ Endemik denge noktası şu şekildedir.

$$\begin{aligned} S_{i_1}^* &= \frac{\Lambda_1}{\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i} \\ S_{i_2}^* &= \frac{\Lambda_2}{\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^* + d_i} \\ E_i^* &= \frac{\beta_1 I_i^* S_{i_1}^* \Lambda_1}{(\beta_4 + d_i)(\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i)} + \frac{(\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^*) \Lambda_2}{(\beta_4 + d_i)(\beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^* + \beta_3 + d_i)} \\ I_i^* &= -\frac{m}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \\ Q^* &= \frac{\Lambda_1 \beta_3}{(\beta_5 + d_i)(\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i)} \\ R_i^* &= \frac{\beta_6 I_i^*}{d_i} + \frac{\Lambda_1 \beta_3 \beta_5}{(\beta_5 + d_i)(\beta_1 I_i^* + \beta_3 + d_i) d_i} \\ S_k^* &= \frac{\mu_2 + \alpha_2 + d_k}{\alpha_1} \\ I_k^* &= \frac{\alpha_1 \Lambda_3 - d_k(\mu_2 + \alpha_2 + d_k)}{(\mu_2 + \alpha_2 + d_k) \alpha_1} \\ R_k^* &= \frac{\alpha_2(\alpha_1 \Lambda_3 - d_k(\mu_2 + \alpha_2 + d_k))}{(\mu_2 + \alpha_2 + d_k) \alpha_1 d_k} \end{aligned}$$

□

Teorem 3.5. $\mathcal{R}_{0_k} > 1$ olsun. Ayrıca (3.9) ile verilen k_0, k_1, k_2, k_3 değerleri için $k_1 > 0$, $k_0 > 0$ ve $k_3 k_2 k_1 > k_1^2 + k_3^2 k_0$ koşulları altında hastalığın olduğu denge noktası $\mathcal{E}_1$ yerel asimptotik karardır.

İspat. (3.1) sisteminin $\mathcal{E}_1$ noktasındaki yerel kararlılık analizini yapmak için (3.6) matrisinde $\mathcal{E}_1$ noktasını yerine koyalım ve özdeğerlerin tespitini yapalım.

$$J_{\mathcal{E}_1} - I\lambda = \begin{bmatrix} c_{11} - \lambda & 0 & 0 & c_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} - \lambda & 0 & c_{24} & 0 & 0 & 0 & c_{28} & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda & c_{34} & 0 & 0 & 0 & c_{38} & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{51} & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{64} & c_{65} & c_{66} - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{77} - \lambda & c_{78} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{87} & c_{88} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{98} & c_{99} - \lambda \end{bmatrix}$$

Burada;

$$\begin{aligned} c_{11} &= -\beta_1 I_i^* - \beta_3 - d_i, & c_{14} &= -\beta_1 S_{i1}^*, & c_{22} &= -\beta_2 I_i^* - \alpha_3 I_k^* - d_i, & c_{24} &= -\beta_2 S_{i2}^*, \\ c_{28} &= -\alpha_3 S_{i2}^*, & c_{31} &= \beta_1 I_i^*, & c_{32} &= \beta_2 I_i^* + \alpha_3 I_k^*, & c_{33} &= -(d_i + \beta_4), \\ c_{34} &= \beta_1 S_{i1}^* + \beta_2 S_{i2}^*, & c_{38} &= \alpha_3 S_{i2}^*, & c_{43} &= \beta_4, & c_{44} &= -(\beta_6 + \mu_1 + d_i), \\ c_{51} &= \beta_3, & c_{54} &= 0, & c_{55} &= -(\beta_5 + d_i), & c_{64} &= \beta_6 \\ c_{65} &= \beta_5, & c_{66} &= -d_i, & c_{77} &= -\alpha_1 I_k^* - d_k, & c_{78} &= -\alpha_1 S_k^*, \\ c_{87} &= \alpha_1 I_k^*, & c_{88} &= \alpha_1 S_k^* - (\mu_2 + \alpha_2 + d_k) = 0, & c_{98} &= \alpha_2, & c_{99} &= -d_k \end{aligned}$$

şeklindedir. Elde edilen matris aşağıdaki gibi ifade edebiliriz;

$$J_{\mathcal{E}_1} - I\lambda = \begin{bmatrix} X_{6 \times 6} & Y_{6 \times 3} \\ 0_{3 \times 6} & Z_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

Bu matris üst üçgensel olduğundan, X ve Z matrislerinin karakteristik polinomları ve özdeğerleri bizim Jacobiyan matrisimizin karakteristik polinom ve özdeğerleriyle

aynıdır. O halde X ve Z matrislerinin özdeğerlerini incelemeliyiz. Önce daha kolay olan Z matrisi ile başlayalım.

$$Z = \begin{bmatrix} c_{77} - \lambda & c_{78} & 0 \\ c_{87} & -\lambda & 0 \\ 0 & c_{98} & c_{99} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det(Z) = (c_{99} - \lambda)((c_{77} - \lambda)(-\lambda) - c_{87}c_{78}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c_{99} - \lambda)(\lambda^2 - c_{77}\lambda - c_{87}c_{78}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = c_{99}, \quad \lambda_{2,3} = \frac{c_{77} \mp \sqrt{c_{77}^2 + 4(c_{87}c_{78})}}{2}$$

Burada $c_{99} = -d_k < 0$ şeklindedir. Öte yandan $-c_{77} > 0$ ve $-c_{87}c_{78} > 0$ koşulları için, $\lambda_{2,3}$ özdeğerleri Routh-Hurwitz kriterine göre negatif özdeğerlerdir.

$$-c_{77} = -(-\alpha_1 I_k^* - d_k) = \alpha_1 I_k^* + d_k$$

$$-c_{87}c_{78} = -\alpha_1 I_k^*(-\alpha_1 S_k^*) = \alpha_1^2 I_k^* S_k^*$$

Burada $S_k^* > 0$ olduğundan her iki eşitliğin pozitif olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\alpha_1 \Lambda_3 - d_k(\mu_2 + \alpha_2 + d_k) > 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \Lambda_3 > d_k(\mu_2 + \alpha_2 + d_k) \Leftrightarrow \mathcal{R}_{0_k} = \frac{\alpha_1 \Lambda_3}{d_k(\mu_2 + \alpha_2 + d_k)} > 1$$

olmasıdır. Şimdi X matrisinin özdeğerlerini inceleyelim.

$$X = \begin{bmatrix} c_{11} - \lambda & 0 & 0 & c_{14} & 0 & 0 \\ 0 & c_{22} - \lambda & 0 & c_{24} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda & c_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} - \lambda & 0 & 0 \\ c_{51} & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{64} & c_{65} & c_{66} - \lambda \end{bmatrix}$$

X matrisinin özdeğerlerini kolayca bulmak için aşağıdaki gibi blok matrislere ayıralım.

$$X = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{4 \times 4} & 0_{4 \times 2} \\ \overline{P}_{2 \times 4} & \overline{R}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

X matrisi üst üçgensel olduğu için $\overline{Q}$ ve $\overline{R}$ matrislerinin özdeğerleri X matrisinin özdeğerlerine eşit olacaktır. Önce $\overline{R}$ matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} c_{55} - \lambda & 0 \\ c_{65} & c_{66} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det(\overline{R}) = (c_{55} - \lambda)(c_{66} - \lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_4 = c_{55} = -(\beta_5 + d_i) < 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_5 = c_{66} = -d_i < 0$$

Buradan λ_4 ve λ_5 özdeğerlerinin negatif olduğu görülür.

Şimdi $\overline{Q}$ matrisinin özdeğerlerini bulalım.

$$\overline{Q} = \begin{bmatrix} c_{11} - \lambda & 0 & 0 & c_{14} \\ 0 & c_{22} - \lambda & 0 & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} - \lambda & c_{34} \\ 0 & 0 & c_{43} & c_{44} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\overline{Q}) = \lambda^4 + k_3\lambda^3 + k_2\lambda^2 + k_1\lambda + k_0 = 0$$

Bu denklemin kökleri bize özdeğerlerin tamamını verir. $\overline{Q}$ 'nin özdeğerlerini bulmak

için yukarıdaki 4. dereceden polinomunu çözmemiz gerekir, burada;

$$\begin{cases} k_3 = -(c_{11} + c_{22} + c_{33} + c_{44}) \\ k_2 = c_{11}c_{22} + c_{11}c_{33} + c_{11}c_{44} + c_{22}c_{33} + c_{22}c_{44} + c_{33}c_{44} - c_{34}c_{43} \\ k_1 = c_{11}c_{34}c_{43} + c_{22}c_{34}c_{43} - (c_{11}c_{22}c_{33} + c_{11}c_{22}c_{44} + c_{11}c_{33}c_{44} \\ + c_{14}c_{31}c_{43} + c_{22}c_{33}c_{44} + c_{24}c_{32}c_{43}) \\ k_0 = c_{11}c_{22}c_{33}c_{44} - c_{11}c_{22}c_{34}c_{43} + c_{11}c_{24}c_{32}c_{43} + c_{14}c_{22}c_{31}c_{43} \end{cases} \quad (3.9)$$

şeklindedir. Burada, $k_3 > 0$ 'dır. Öte yandan $k_1, k_0 > 0$ ve $k_3k_2k_1 > k_1^2 + k_3^2k_0$ ise, $\bar{Q}$ matrisinin özdeğerleri Routh-Hurwitz kriterine göre negatiftir. Bu sonuçla birlikte ispat tamamlanır. $\square$

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Hastalığın Olmadığı Denge Noktasının Simülasyonu

Hastalığın olmadığı durumun doğal koşulu olarak, I_i ve I_k sınıflarının başlangıç değerleri sıfıra yakın kabul edilmiş ve diğer tüm parametreler (3.3) teoremindeki koşullara uygun biçimde seçilmiştir. Parametre değerleriyle birlikte sınıfların başlangıç değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.1. Hastalığın Olmadığı Denge Noktası için Sınıfların ve Parametrelerin Tablosu

Sınıflar	Başlangıç Değeri	Parametreler	Değerler (1/gün)	Kaynak
S_{i_1}	0,2750	Λ_1	0,029	[20]
S_{i_2}	0,5980	Λ_2	0,01	Varsayım
E_i	0,0640	Λ_3	0,2	[20]
I_i	0,0630	d_i	0,01	[20]
Q	0	d_k	0,02	[20]
R_i	0	β_1	0,00012	Varsayım
S_k	0,9300	β_2	0,00028	Varsayım
I_k	0,0700	β_3	0,000002	Varsayım
R_k	0	β_4	0,05	[21]
		β_5	0,5	Varsayım
		β_6	0,83	[20]
		α_1	0,00038	Varsayım
		α_2	0,3	[20]
		α_3	0,000016	Varsayım
		μ_1	0,02	[20]
		μ_2	0,1	[20]

(4.1) tablosundaki parametre değerlerini (3.5) eşitliklerinde yerine yazıp hesaplayalım.

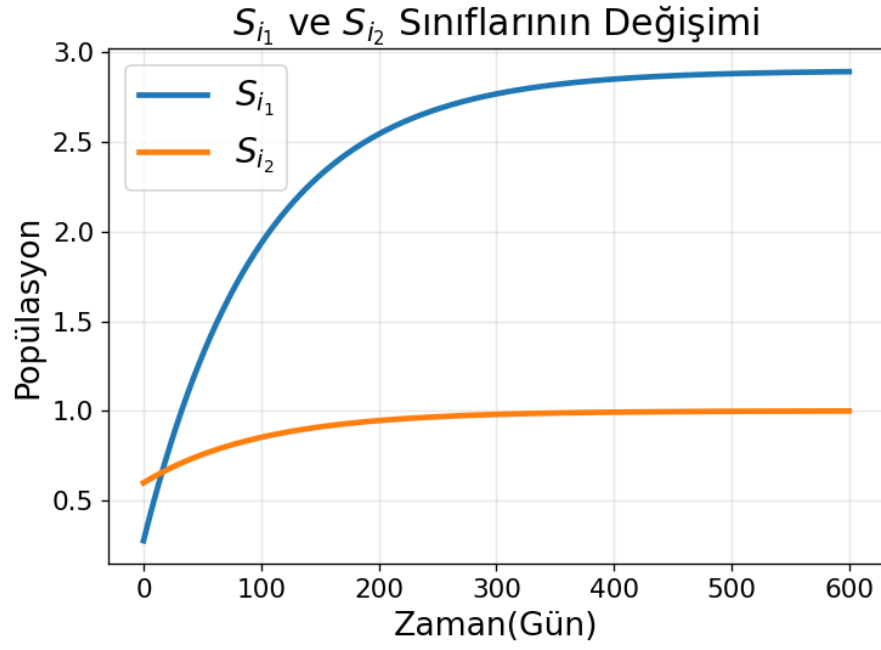
$$\mathcal{R}_{0_i} = 0,0006084 < 1$$

$$\mathcal{R}_{0_k} = 0,0090476 < 1$$

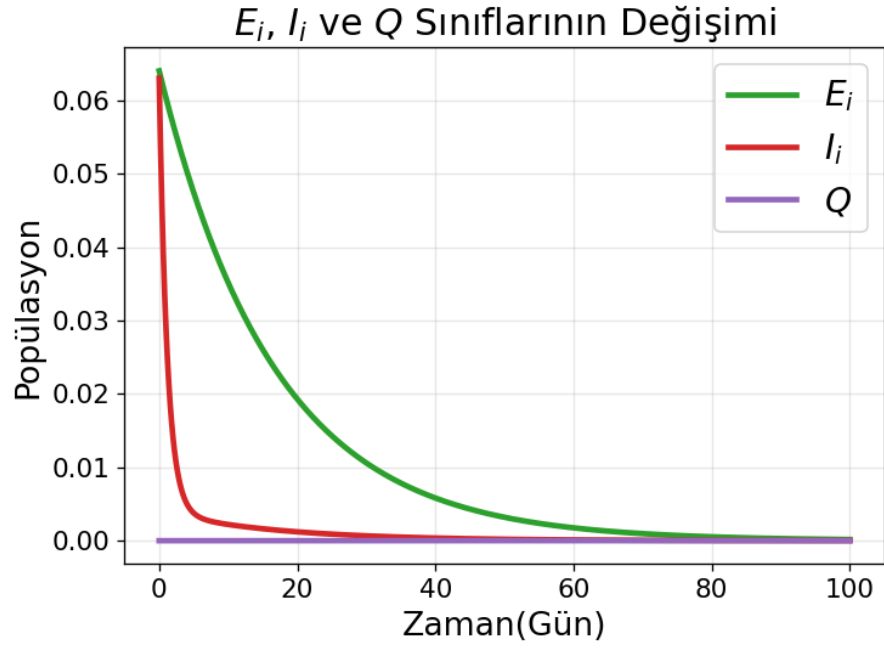
Görüldüğü üzere elde edilen nümerik sonuçların ikisi de (3.3) teoremindeki koşullara uygundur. Aşağıdaki grafiklerde görüldüğü gibi sistem dinamikleri

$$\mathcal{E}_0 = \{2, 82759, 1, 0, 0, 0, 0, 10, 0, 0\}$$

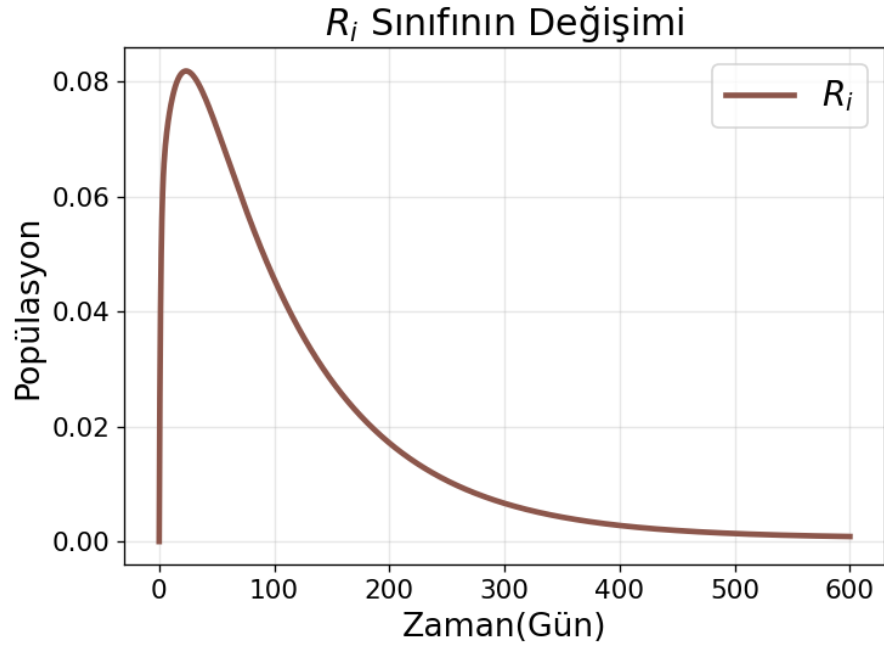
denge noktasına yakınsamaktadır. Şimdi (4.1) tablosundaki verilerle birlikte sınıfların dinamiklerini aşağıdaki grafiklerle birlikte inceleyelim.



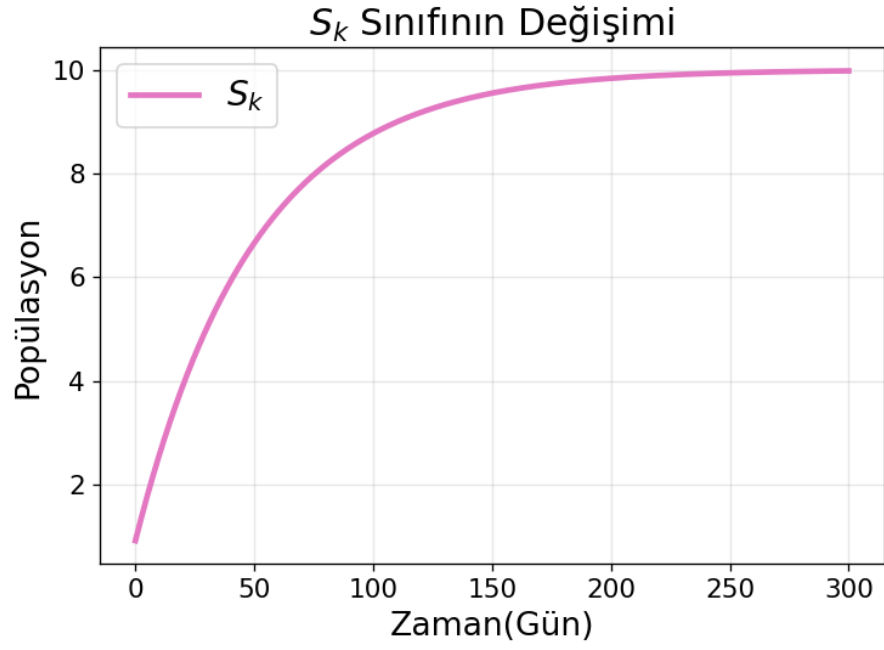
Şekil 4.1. Hastalığın Olmadığı Durumda S_{i_1} ve S_{i_2} sınıflarının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi



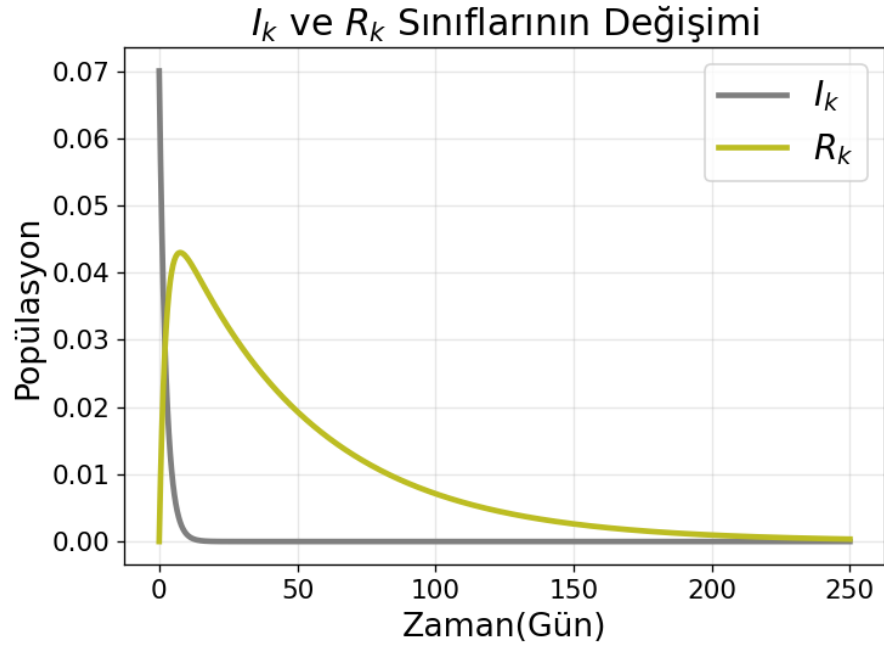
Şekil 4.2. Hastalığın Olmadığı Durumda E_i, I_i ve Q sınıflarının, $0 \leq t \leq 100$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.3. Hastalığın Olmadığı Durumda R_i sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.4. Hastalığın Olmadığı Durumda S_k sınıfının, $0 \leq t \leq 300$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.5. Hastalığın Olmadığı Durumda I_k ve R_k sınıflarının, $0 \leq t \leq 250$ zaman aralığındaki, değişimi

4.2. Hastalığın Olduğu Denge Noktasının Simülasyonu

Hastalığın olduğu denge noktasının doğal koşulu olarak, S_{i_1}, S_{i_2}, S_k ve E_i, I_k sınıfları hariç diğer tüm sınıfların başlangıç değerleri sıfır kabul edilmelidir. Parametre değerleriyle birlikte sınıfların başlangıç değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.2. Endemik Denge Noktası için Sınıfların Başlangıç ve Parametrelerin Değer Tablosu

Sınıflar	Başlangıç Değeri	Parametreler	Değerler (1/gün)	Kaynak
S_{i_1}	0,0004	Λ_1	10	Varsayım
S_{i_2}	0,9990	Λ_2	20	Varsayım
E_i	0,0006	Λ_3	8	Varsayım
I_i	0	d_i	0,01	[20]
Q	0	d_k	0,02	[20]
R_i	0	β_1	0,03	Varsayım
S_k	0,9999	β_2	0,3	[21]
I_k	0,0001	β_3	3	Varsayım
R_k	0	β_4	0,05	[21]
		β_5	0,0111	Varsayım
		β_6	0,0884	[18]
		α_1	0,3	[21]
		α_2	0,6	[22]
		α_3	0,15	[21]
		μ_1	0,0033	[18]
		μ_2	0,2814	[23]

Tablodadaki veriler (3.5) teoremindeki koşullara uygun şekilde seçilmiş olup, parametrelerin bir çoğu farklı çalışmalardan referans alınmıştır. S_{i_1} ve Q sınıflarına ait parametre değerleri ise varsayılmıştır. Bu varsayımlar şu şekildedir; bilinçli insanlar sınıfındaki kişilerin bilinçsiz insanlar sınıfındaki kişilere göre 10 kat az hasta olduğu varsayıldığı için $\beta_1 = 0,03$, bilinçli insanlar sınıfında bir günde 3 kişinin kendisini karantinaya aldığı varsayıldığı için $\beta_3 = 3$ ve karantina grubundaki kişilerin 3 ay boyunca karantinada kaldıkları varsayıldığı için $\beta_5 = 0,0111$ seçilmiştir.

$$\mathcal{R}_{0_k} = 133.1262 > 1$$

$$k_1 = 105,0592$$

$$k_0 = 3,6357$$

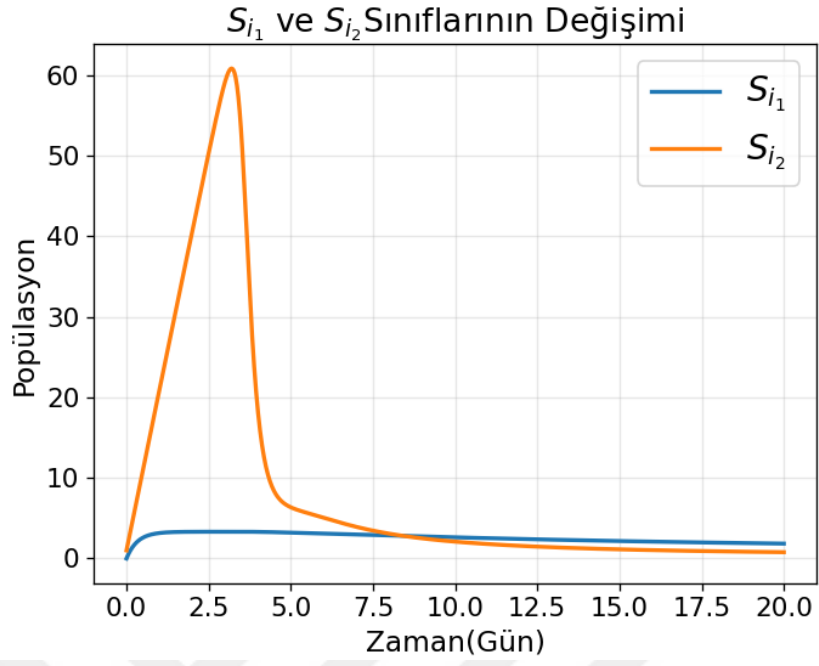
$$k_3 k_2 k_1 = 20727890$$

$$k_1^2 + k_3^2 k_0 = 91232$$

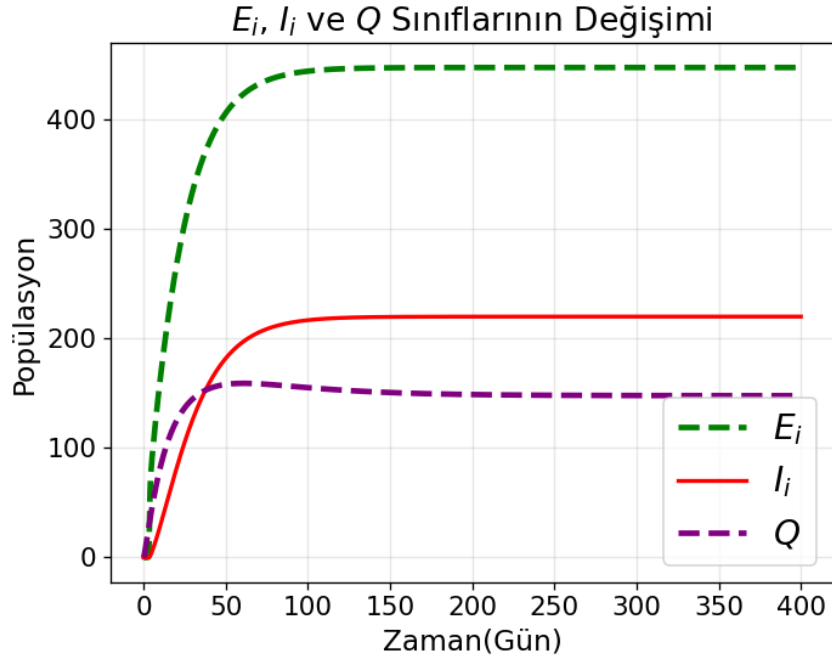
$$k_3 k_2 k_1 > k_1^2 + k_3^2 k_0$$

$\mathcal{E}_1$ denge noktasının nümerik sonuçlarıyla birlikte sistem dinamiklerinin grafikleri aşağıdaki gibidir.

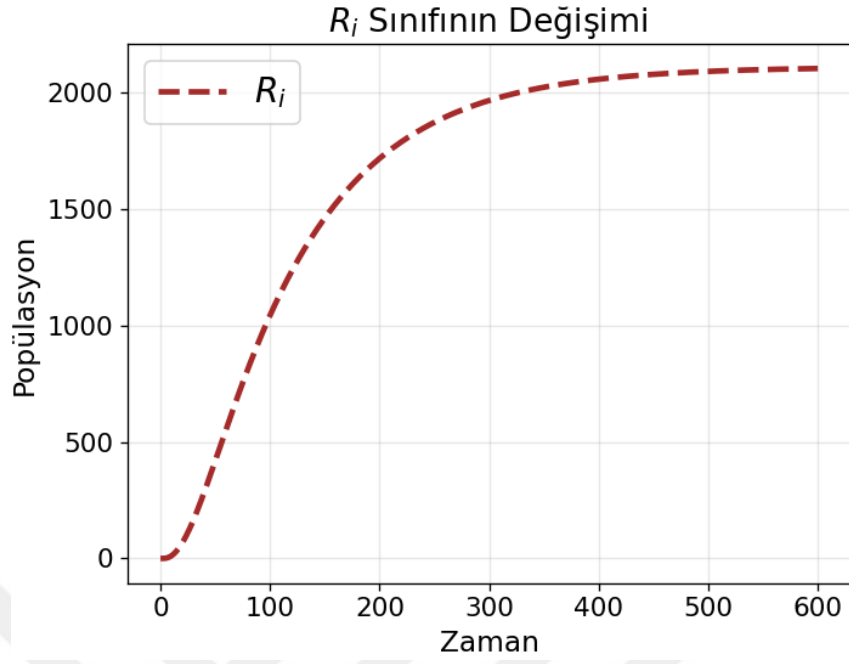
$$\mathcal{E}_1 = \{1,0378, 0,2959, 447,8864, 220,8513, 147,5579, 2116,1150, \\ 3,0046, 8,8084, 264,2524\}$$



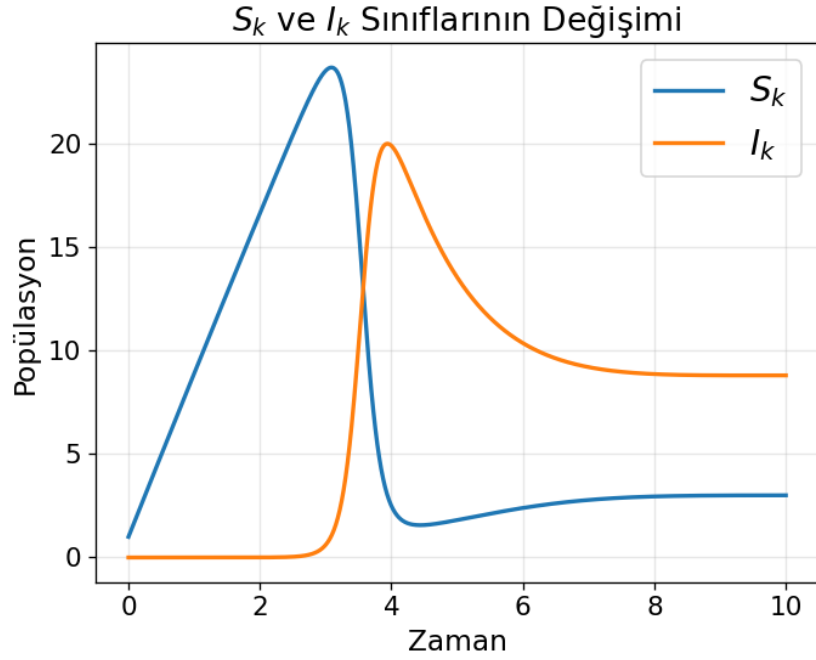
Şekil 4.6. Hastalığın Olduğu Durumda S_{i_1} ve S_{i_2} sınıflarının, $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığındaki, değişimi



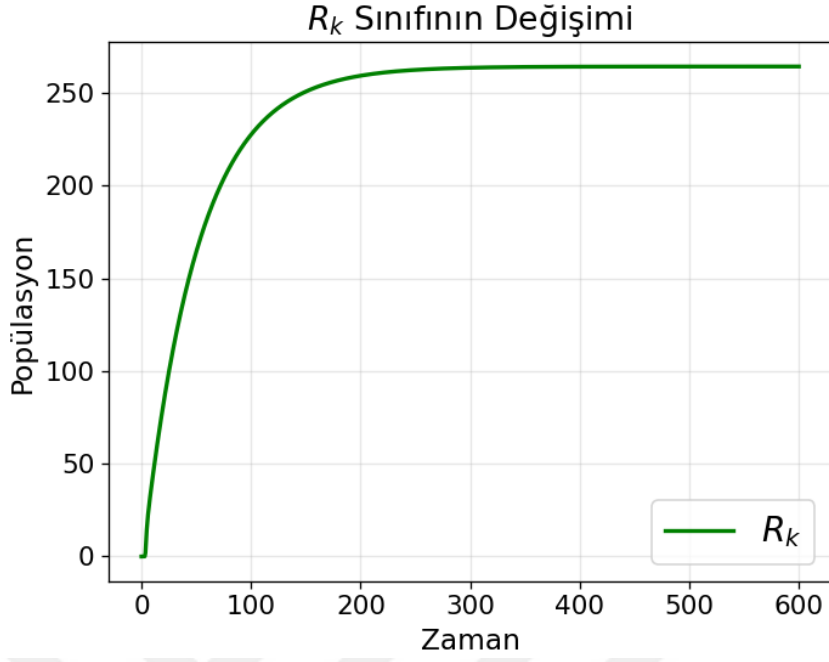
Şekil 4.7. Hastalığın Olduğu Durumda E_i , I_i ve Q sınıflarının, $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.8. Hastalığın Olduğu Durumda R_i sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.9. Hastalığın Olduğu Durumda S_k ve I_k sınıflarının, $0 \leq t \leq 10$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.10. Hastalığın Olduğu Durumda R_k sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi

4.3. $\mathcal{R}_{0_i}$ ve $\mathcal{R}_{0_k}$ Temel Üreme Sayılarının Lokal Hassasiyet Analizi

Bu bölümde $\mathcal{R}_{0_i}$ ve $\mathcal{R}_{0_k}$ temel üreme sayılarının hangi parametrelere daha duyarlı olduklarını anlayabilmek için *normalize edilmiş duyarlılık indeksi* kullanılmıştır. Bu indeks şu şekilde hesaplanmaktadır; τ sayısı $\mathcal{R}_0$ temel üreme sayılarından herhangi birisi ve p sayısı da $\mathcal{R}_0$ temel üreme sayılarını oluşturan herhangi bir parametre olmak üzere, her bir parametre için duyarlılık indeksi aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır [20].

$$\Upsilon_p^\tau = \frac{\partial \tau}{\partial p} \times \frac{p}{\tau} \quad (4.1)$$

Şimdi (4.1) formülü ve (4.1) tablosundaki verilerle birlikte $\mathcal{R}_{0_i}$ ve $\mathcal{R}_{0_k}$ sayılarını oluşturan parametrelerin duyarlılık indislerini (4.3) tablosunda inceleyelim.

Tablo 4.3. $\mathcal{R}_{0_i}$ ve $\mathcal{R}_{0_k}$ için Duyarlılık İndeksi Tablosu

Parametreler	Duyarlılık İndeksi	Parametreler	Duyarlılık İndeksi
Λ_1	0,55409	Λ_3	1
Λ_2	0,445909	α_1	1
β_1	0,55409	α_2	-0,71428
β_2	0,445909	μ_2	-0,23809
β_3	-0,00011	d_k	-1,04761
β_4	0,16666		
β_6	-0,96511		
μ_1	-0,02325		
d_i	-1,17818		

Tabloya göre insan sınıflarında hastalığın yayılımında yüksek pozitif etkiye sahip parametreler $\Lambda_1, \beta_1, \Lambda_2$ ve β_2 'dir. Bu parametreler birbirleriyle bağlantılı olup $\mathcal{R}_{0_i}$ üzerinde, tablodan da görüldüğü üzere, aynı etkiye sahiptirler. Bunun sebebi Λ_1 ve β_1 parametrelerinin doğrudan S_{i_1} sınıfına bağlı olmasıdır. Benzer şekilde Λ_2 ve β_2 parametreleri de S_{i_2} sınıfına bağlıdır. Λ_1, β_1 parametrelerinin etkisi Λ_2, β_2 parametrelerine göre daha yüksektir. S_{i_1} sınıfının popülasyondaki sayısı S_{i_2} sınıfına göre daha az olmasına karşın hastalığın yayılımındaki etkisinin daha büyük olması dikkat çekicidir. Tüm bunlara karşın β_6 ve d_i parametreleri $\mathcal{R}_{0_i}$ üzerindeki en etkin parametredir ve işaretleri negatiftir. Öyleki d_i parametresinin mutlak duyarlılık indeksi birden daha büyüktür. Bu bilgiler bize β_6 ve d_i parametrelerinin hastalığın yayılımını şiddetli bir şekilde sınırlandırdığını göstermektedir. β_3 ve β_4 parametrelerinin etkisi ise ihmal edilebilecek düzeylerde.

Diğer taraftan hayvan sınıfları içinde hastalığın yayılımında en etkin parametreler ise Λ_3 ve α_1 olarak görünmektedir. Bu sayıların duyarlılık indisleri 1 olmakla birlikte $\mathcal{R}_{0_k}$ sayısının hesaplanmasını doğrudan etkilemektedirler. Diğer yandan d_k ve α_2 parametrelerinin hastalığın yayılımını oldukça sınırlandırdığı görülmektedir. Öyleki d_k parametresinin mutlak duyarlılık indeksi d_i gibi birden büyüktür bu iki parametre tablodaki en büyük endeks değerlerine sahiptir ve bize hastalık sebepli ölümlerin hastalığın yayılımına yaptığı negatif etkinin ne kadar büyük olduğunu gösterir. Özetle tablo-

dan hastalığın yayılımı için şu çıkarımları yapabiliriz; insan sınıfları için $\Lambda_1, \Lambda_2, \beta_1, \beta_2$ parametrelerini azaltmak ve β_6 ve d_i parametrelerini arttırmak, hayvan sınıfları içinse Λ_3, α_2 parametrelerini azaltmak ve özellikle d_k parametresiyle birlikte α_2 parametresini arttırmak hastalığı kontrol altına almak için en etkili yöntemlerdir.

4.4. β_1, β_3 ve β_5 Parametrelerin Etkisi

Bu bölümde (4.2) tablosundaki β_1, β_3 ve β_5 parametrelerine farklı değerler verilerek bu parametrelerin insan sınıflarının dinamikleri üzerindeki etkileri incelenecektir.

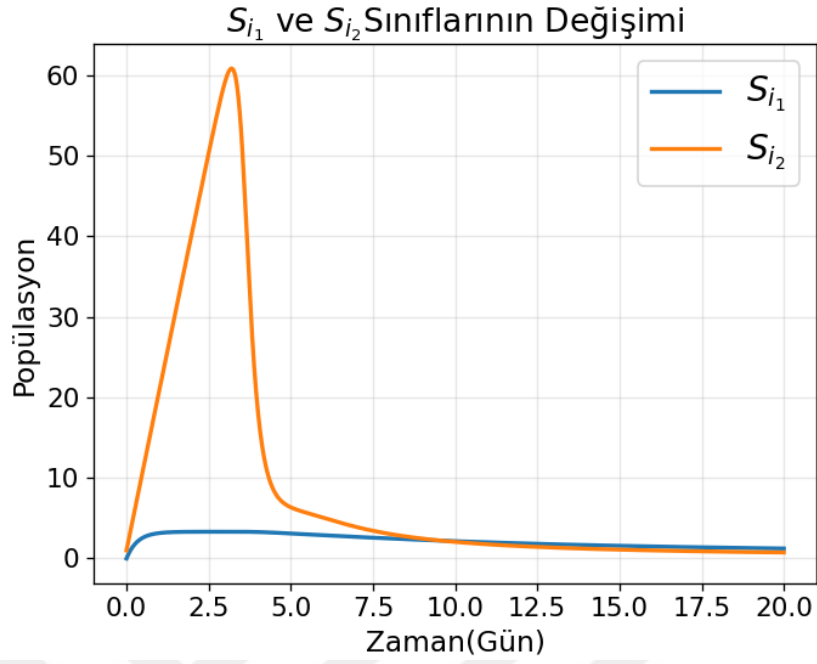
4.4.1. β_1 Parametresinin Etkisi

Daha önce S_{i_1} sınıfındaki kişilerin S_{i_2} sınıfındaki kişilere göre 10 kat az hasta olduğunu varsaymıştık ve $\beta_1 = 0,03$ olarak seçmiştik. Şimdi bu oranın 5 kat az olduğunu kabul edelim, yani $\beta_1 = 0,06$ olarak seçelim ve diğer tüm parametreleri sabit tutarak $\beta_1 = 0,03 \rightarrow 0,06$ parametre değişikliğinin insan sınıflarının dinamiklerini nasıl etkilediğini aşağıdaki tablo ve grafiklerle birlikte inceleyelim.

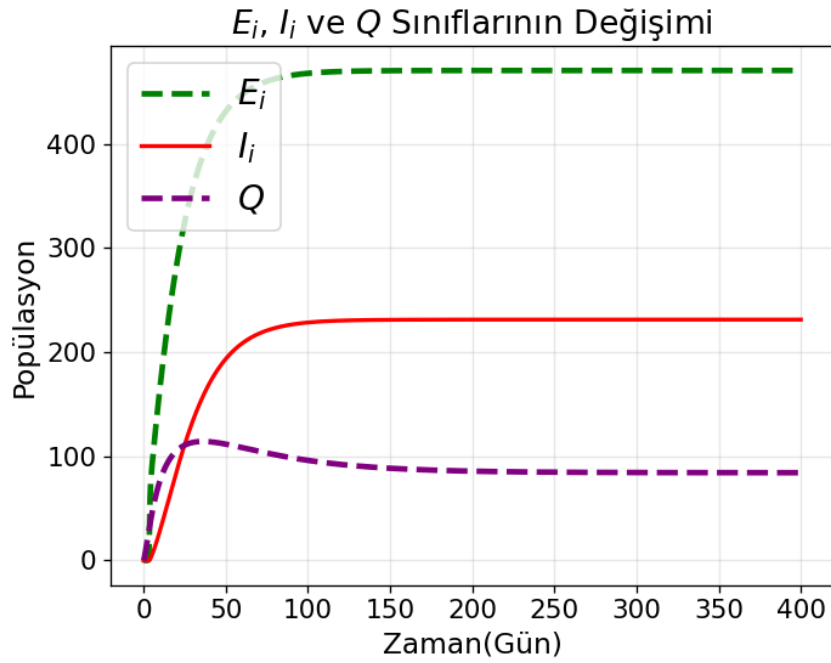
Tablo 4.4. β_1 Parametresinin İnsan Sınıfları Üzerindeki Etki Tablosu

Sınıflar	$\beta_1 = 0.03$	$\beta_1 = 0,06$	Değişim Oranı
$S_{i_1}^*$	1,0378	0,5908	% - 43,07
$S_{i_2}^*$	0,2959	0,2820	% - 4,69
E_i^*	447,8864	470,3116	% + 5,00
I_i^*	220,8513	231,9090	% + 5,00
Q^*	147,5579	84,0082	% - 43,06
R_i^*	2116,1150	2143,3254	% + 1,28

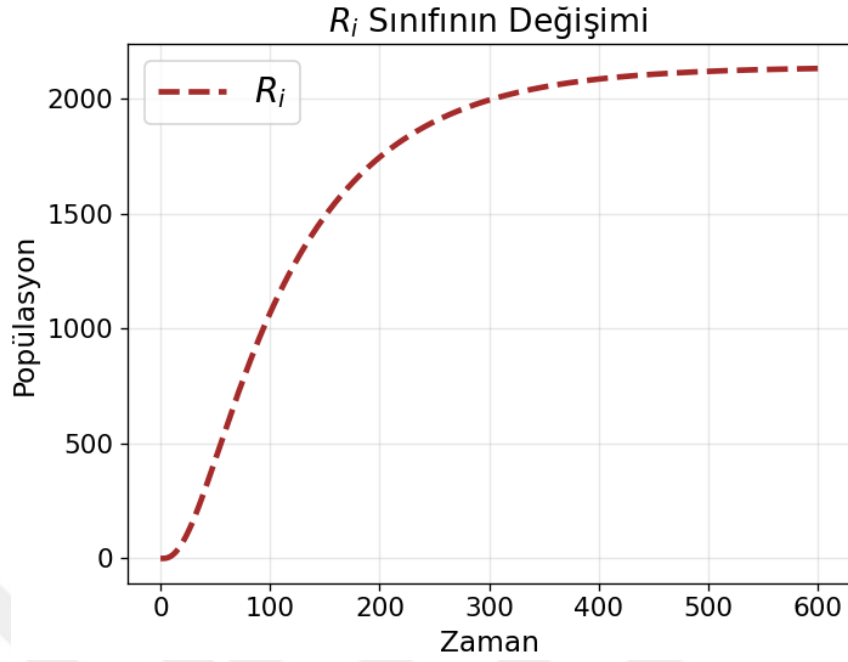
Tablo (4.4)'de sadece insan sınıflarına yer verilmiş olup, $\beta_1 = 0,03$ ve $\beta_1 = 0,06$ değerleri için insan sınıflarının hangi yaklaşık değerleri aldıklarına ve bu parametre değişikliğinin insan sınıflarının üzerindeki yüzdelik değişimine yer verilmiştir.



Şekil 4.11. $\beta_1 = 0,06$ için S_{i_1} ve S_{i_2} sınıflarının, $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.12. $\beta_1 = 0,06$ için E_i , I_i ve Q sınıflarının, $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.13. $\beta_1 = 0,06$ için R_i sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi

Tablo (4.4)'de görüldüğü üzere β_1 parametresinin S_{i_1} ve Q sınıfları üzerindeki etkisi oldukça fazladır. β_1 'in küçük seçilmesi bu sınıflar üzerinde pozitif etki yaratacağı gibi, eğer bu parametre büyük seçilirse bu sınıflar üzerinde negatif bir etki yaratacağını söyleyebiliriz. Öte yandan bu parametre değişikliğinin S_{i_2} sınıfı üzerindeki $\% - 4,69$ 'lık negatif etkisi hakkında da konuşulabilir. Bu etkinin sebebi $\beta_1 = 0,06$ parametre değişikliğiyle birlikte hasta olan insan sayısında olan artıştan kaynaklanmaktadır. Bu artışı E_i ve I_i sınıflarındaki $\%5,00$ 'lık artıştan gözlemleyebiliriz. Yani bu parametre değişikliğinin S_{i_2} sınıfı üzerindeki etkisinin dolaylı ama az olduğunu söyleyebiliriz. Son olarak bu parametre değişikliğinin R_i sınıfı üzerindeki $\% + 1,28$ 'lik etkisinin ufak ama göz ardı edilebilir olduğunu söyleyebiliriz.

4.4.2. β_3 Parametresinin Etkisi

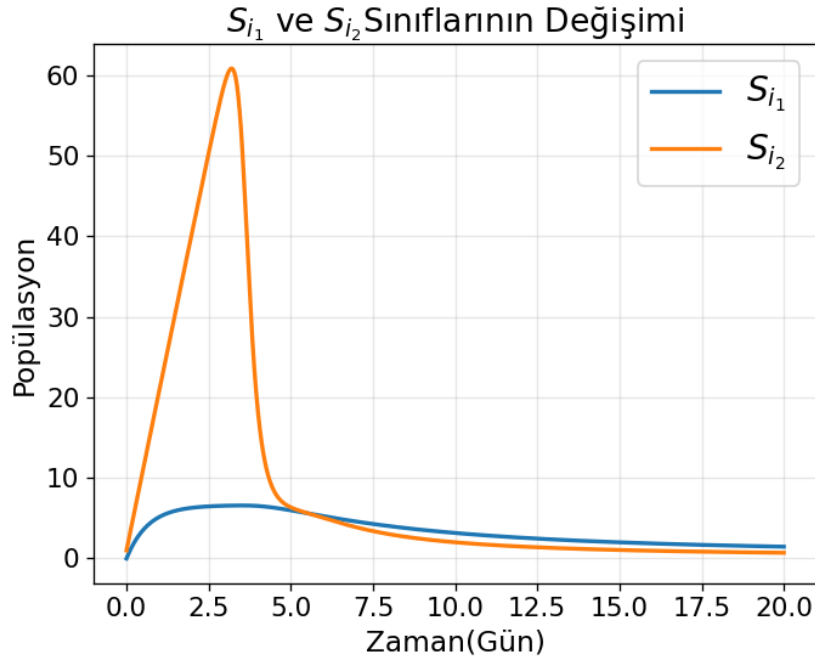
Daha önce S_{i_1} sınıfında bir günde 3 kişinin kendisini karantinaya aldığını varsayarak $\beta_3 = 3$ seçmiştik. Şimdi S_{i_1} sınıfında on günde 15 kişinin kendisini karantinaya aldığını varsayalım ve $\beta_3 = 1,5$ seçelim. Ayrıca $\beta_1 = 0,06$ olacak şekilde diğer tüm

parametrelerin değerlerini sabit tutarak, β_3 parametre değişikliğinin insan sınıflarının dinamikleri üzerindeki etkisini aşağıdaki tablo ve grafiklerle birlikte inceleyelim.

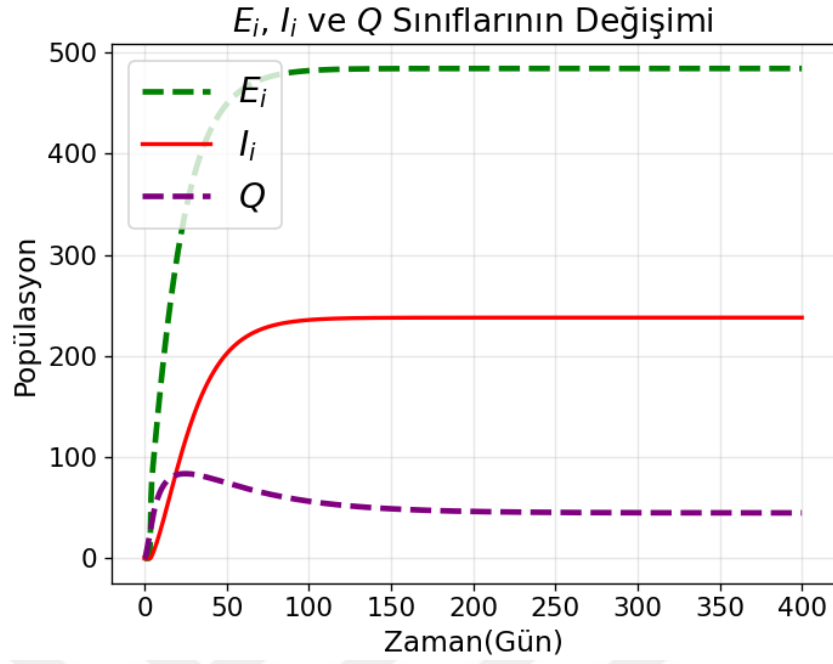
Tablo 4.5. β_3 Parametresinin İnsan Sınıfları üzerindeki Etki Tablosu

Sınıflar	$\beta_3 = 3$	$\beta_3 = 1,5$	Değişim Oranı
$S_{i_1}^*$	0,5908	0,6316	% + 6,90
$S_{i_2}^*$	0,2820	0,2742	% - 2,76
E_i^*	470,3116	484,0574	% + 2,92
I_i^*	231,9090	238,6871	% + 2,83
Q^*	84,0082	44,9049	% - 46,54
R_i^*	2143,3254	2159,8384	% + 0,77

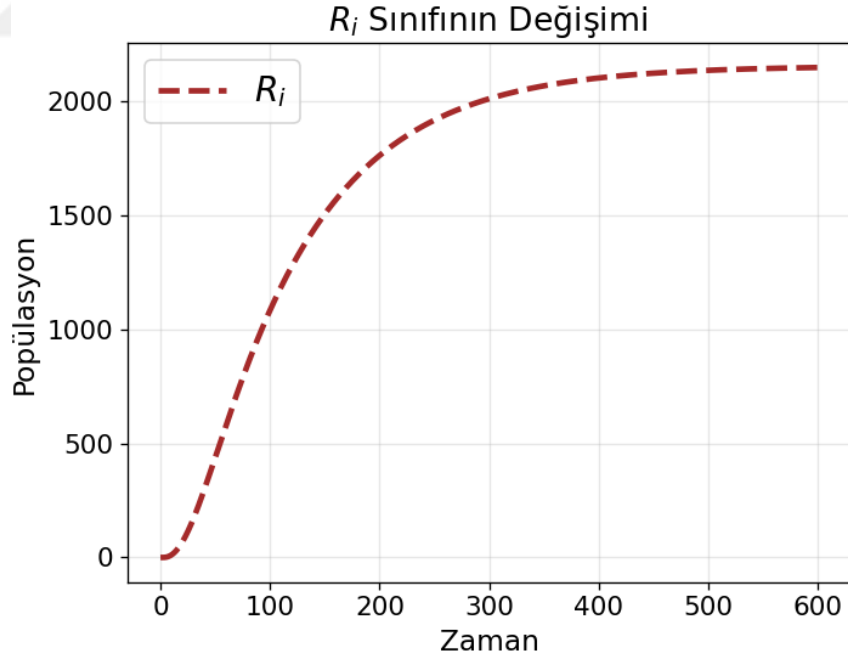
(4.5) tablosu (4.4) tablosuyla aynı sınıfları içermekte olup $\beta_3 = 3$ ve $\beta_3 = 1,5$ durumlarında insan sınıflarının hangi yaklaşık değerleri aldıkları kıyaslanmıştır ve bu parametre değişikliğinin insan sınıfları üzerindeki yüzdelik değişimine de yer verilmiştir. Ayrıca $\beta_3 = 3$ kısmındaki verilerle (4.4) tablosundaki $\beta_1 = 0,06$ kısmındaki verilerle aynı olduğu unutulmamalıdır.



Şekil 4.14. $\beta_1 = 0,06$ ve $\beta_3 = 1,5$ için S_{i_1} ve S_{i_2} sınıflarının, $0 \leq t \leq 20$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.15. $\beta_1 = 0,06$ ve $\beta_3 = 1,5$ için E_i , I_i ve Q sınıflarının, $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.16. $\beta_1 = 0,06$ ve $\beta_3 = 1,5$ için R_i sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi

(4.5) tablosuna baktığımızda en çok etkilenen grubun bir önceki parametre değişimi

minde de olduğu gibi Q sınıfı olduğunu görmekteyiz. Bu beklendik bir sonuçtur çünkü Q sınıfını oluşturan kişilerin tamamı S_{i_1} sınıfındaki kendisini karantinaya alan insanlardan oluşmaktadır. Dolayısıyla Q sınıfındaki $\% - 46,54$ 'lik negatif değişim büyük ama beklendik bir değişimdir. Öte yandan tabloya göre β_3 değişikliğinin E_i ve I_i sınıfları üzerindeki yaklaşık $\% + 3$ 'lük pozitif etkisinin β_1 değişikliğine göre daha az etkili olduğu görülmektedir. Bunun sebebinin S_{i_1} sınıfındaki $\% + 6,90$ 'lik pozitif değişimden kaynaklandığını söyleyebiliriz. Bu ufak değişimin sebebi S_{i_1} sınıfındaki kendisini karantinaya almayan ama hastalığa da yakalanmayan insanlardan dolayıdır. Yani hastalanabilecek insanların sayısında bir artış yaşandı ancak bu artışa sebep olan insanların tamamı bilinçli insanlar olduğundan dolayı bu parametre değişikliğinin bir önceki parametre değişikliğine göre daha az etkili olmasını bu şekilde açıklayabiliriz. Son olarak tablodan R_i sınıfının $\% + 0,77$ 'lik değişiminin (4.4) tablosundaki değişime göre ufakta olsa daha az olduğunu görmekteyiz. Yani β_1 parametresinin R_i üzerindeki etkisinin β_3 'e göre azda olsa daha etkili bir parametre olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi β_5 parametresinin insan sınıfları üzerindeki etkisini inceleyelim ve bu bölümü sonlandıralım.

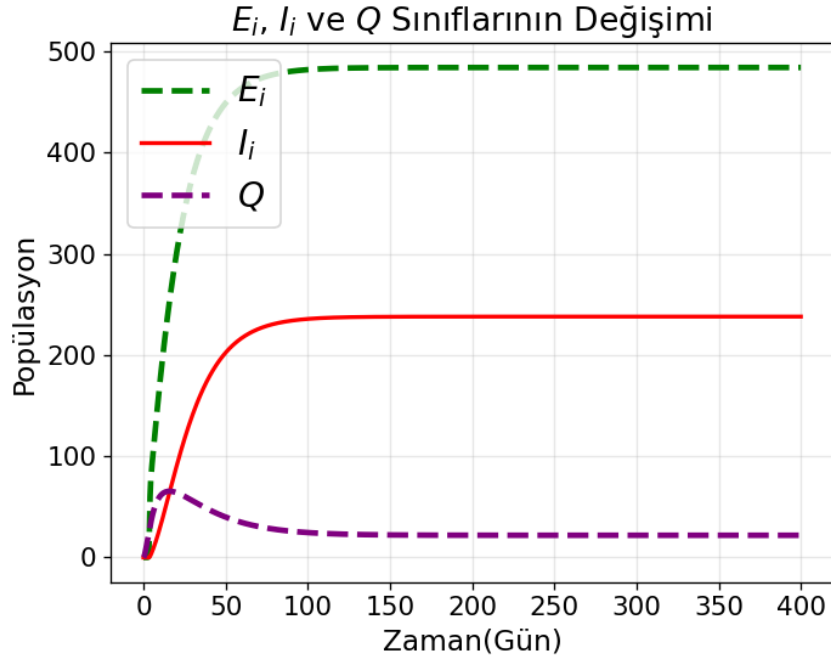
4.4.3. β_5 Parametresinin Etkisi

Daha önce Q sınıfındaki kişilerin kendilerini 90 gün karantinada tuttuklarını varsayarak $\beta_5 = 0,111$ olarak seçmiştik. Şimdi aynı kişilerin kendilerini 30 gün karantinada tuttuklarını varsayalım ve $\beta_5 = 0,333$ kabul edelim. $\beta_1 = 0,06, \beta_5 = 1,5$ parametreleriyle birlikte diğer tüm parametre değerlerini sabit tutarak, β_5 parametre değişikliğinin insan sınıflarının dinamiklerini nasıl etkilediğini aşağıdaki tablo ve grafiklerle birlikte inceleyelim.

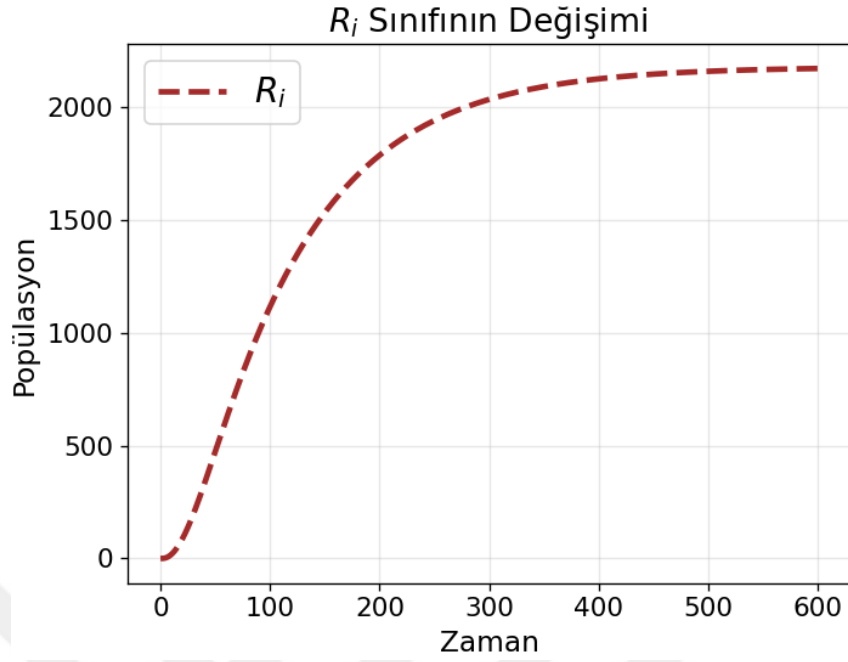
Tablo 4.6. β_5 Parametresinin İnsan Sınıfları üzerindeki Etki Tablosu

Sınıflar	$\beta_5 = 0,0111$	$\beta_5 = 0,0333$	Değişim Oranı
S_{i_1}	0,6316	0,6316	%0
S_{i_2}	0,2742	0,2742	%0
E_i	484,0574	484,0574	%0
I_i	238,6871	238,6871	%0
Q	44,9049	21,8820	% - 51,27
R_i	2159,8384	2182,8613	% + 1,06

Tablo (4.6) bu bölümde verilen diğer tablolarla aynı sınıfları içermekte olup $\beta_5 = 0,0111$ ve $\beta_5 = 0,0333$ durumlarında insan sınıflarının aldıkları yaklaşık değerleri ve bu parametre değişikliğinin insan sınıfları üzerindeki yüzdelik değişimlerini de içermektedir. Ayrıca $\beta_5 = 0,0111$ kısmındaki veriler (4.5) tablosundaki $\beta_3 = 1,5$ kısmından alınmıştır.



Şekil 4.17. $\beta_1 = 0,06$, $\beta_3 = 1,5$ ve $\beta_5 = 0,0333$ için E_i , I_i ve Q sınıflarının, $0 \leq t \leq 400$ zaman aralığındaki, değişimi



Şekil 4.18. $\beta_1 = 0,06$, $\beta_3 = 1.5$ ve $\beta_5 = 0,0333$ için R_i sınıfının, $0 \leq t \leq 600$ zaman aralığındaki, değişimi

Tablo (4.6)'e baktığımızda dikkatimizi çeken ilk şey β_5 parametresinin sadece Q ve R_i sınıfları üzerinde bir etkiye sahip olduğudur. Akış diyagramından bildiğimiz üzere, Q sınıfı hastalığı yayan insan sınıflarından izole ve sadece S_{i1} ve R_i sınıflarıyla sırasıyla β_3 ve β_5 parametreleri aracılığıyla bağlantısı var. β_3 parametresinin etkisini bir önceki kısımda konuşmuş ve tartışmıştık. β_5 parametresi Q ve R_i sınıflarını birbirine bağlıyor ve ayrıca Q sınıfından başka bir sınıfa geçiş olmadığı için (S_{i1} sınıfı gibi) bu parametre değişikliğinin, R_i sınıfı hariç, diğer sınıflar üzerinde bir etkisi olmamıştır. Tablodaki değişimlerden bahsetmek gerekirse bu parametre değişikliğinden en çok Q sınıfının etkileneceği tahmin edilebilirdi çünkü bu sınıf çoğunlukla β_5 parametresine bağlıdır. Yani karantinanın süresi direkt olarak bu sınıfın ömrünü de belirliyor denilebilir. Doğal olarak tablodaki % – 51,27'lik oran, tüm bu bilgiler doğrultusunda oldukça anlamlıdır ve bu parametrenin de β_1 ve β_3 parametreleri gibi Q sınıfı üzerinde oldukça etkili olduğunu görmekteyiz. Ancak diğer parametre değişimlerdeki oranlara göre bu daha yüksek bir orandır. Yani diğer iki parametreye göre β_5 parametresinin Q sınıfının üzerindeki etkisi biraz daha fazladır. Diğer yandan bu parametre değişikliğinin R_i sınıfı üzerindeki etkisi diğer parametrelerdeki gibi küçüktür ancak bu etki β_1 'in etkisinden

daha az ama β_3 'ün etkisinden de daha fazladır.



BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma MÇV için yaygın kullanılan modellere iki yeni kompartıman eklemiş ve denge noktaları, kararlılık analizleriyle birlikte literatüre yeni, farklı bir model kazandırılmıştır. Sistemin yapısından dolayı I_i sayısını elde edebilmek için türev testi ve üçüncü dereceden denklemlerin çözümünden yararlandık bu yönüyle çalışmamız, bu alanda farklı bir yöntem ortaya koymaktadır. Analiz kısmı için iki farklı veri seti ve analiz yöntemi kullanılmıştır. İlk veri seti için Duyarlılık indeksi testiyle birlikte gerekli kontrol stratejilerini elde etmemizi sağladı. İkinci veri seti için ise sadece modele sonradan eklemiş olduğumuz sınıflara ait parametrelere yani, β_1 , β_3 ve β_5 parametrelerine, farklı değerler verilerek bu değerlerin sistem dinamiklerini nasıl etkilediği karşılaştırılmıştır. Bu şekilde β_1 , β_3 ve β_5 parametrelerinin sistemdeki hangi sınıflar üzerinde daha etkili olduğunu, adım adım ve karşılaştırmalı bir şekilde göstermiş olduk. İleride bu çalışmanın üzerine yeni sınıflar eklenebilir ve bu model genişletilebilir. Özellikle I_i sınıfı için farklı bir karantina sınıfı eklenebilir ve bu şekilde model daha da gerçekçi hale getirilebilir. Diğer yandan farklı veri setleri ve analiz yöntemleri, örneğin PRCC analizi, kullanılarak bu çalışma özelinde analiz kısmına çeşitlilik kazandırılabilir.

Genel olarak çalışma literatürdeki yaygın kullanılan MÇV modellerine iki yeni sınıf ekleyerek ve denge noktalarının hesabındaki farklı yaklaşımı sebebiyle literatüre yeni katkılar sunmaktadır. Bu yönleriyle çalışma salgın hastalıklar literatürüne çeşitlilik ve yeni bir yöntem sağlamaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Villalba, J., Panchón C. A. (1802). *Epidemiología Española*. Kessinger Publishing.
- [2] Ladnyj, D., Ziegler, P., Kima E. (1972). A human infection caused by monkeypox virus in Basankusu Territory, Democratic Republic of the Congo. *Bull. Org. mond. Sante 1972, Bull. WldHlth Org*, 46, 593-597.
- [3] <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/mpox>., Eriřim Tarihi: 26.08.2024.
- [4] Sahin, T. K., Erul, E., Aksun, M. S., Sonmezer, M. C., Unal, S., Akova, M. (2023). Knowledge and attitudes of Turkish physicians towards human monkeypox disease and related vaccination: A cross-sectional study. *Vaccines*, 11(1), 19.
- [5] <https://www.thinkglobalhealth.org/article/monkeypox-timeline>., Eriřim Tarihi: 20.01.2023.
- [6] Martcheva, M. (2015). *An Introduction to Mathematical Epidemiology*. 1. Baskı. Texts in Applied Mathematics, Springer.
- [7] Kermack, W.O., McKendrick, AG. (1927). A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proceedings of the royal society of london. Series A, Containing papers of a mathematical and physical character*, 115(772), 700–721.
- [8] Driessche, V.P, Watmough, J. (2002). Reproduction numbers and Sub-threshold Endemic equilibria for Compartmental model of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180(2002): 29-48.
- [9] Kelley, W., Peterson, A. (2010). *The Theory of Differential Equations Classical and Qualitative*, 3. Baskı. Pearson Education, 1-424.
- [10] Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*, 3.Cilt. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1-767.
- [11] Allen, J.S.L. (2007). *An Introduction to Mathematical Biology*. 1. Cilt. Pearson Prentice Hall, 150-151.
- [12] Tepetař, M., Sungur S. (2022). Salgın Haberleri Maymun Çiçeği Virüsü Salgını. *ESTÜDAM Halk Sağlığı Dergisi*, 7(3):550-56.

- [13] Bhunu, C. P., & Mushayabasa, S. (2011). Modelling the transmission dynamics of pox-like infections. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 41(2), 1–9.
- [14] Eriten, S. (2025). Monkeypox Virus: Current Status and Global Health Implications, *Turkish Journal of Nature and Science*, 14(1), 208-16.
- [15] Begum, J.P.S., Ngangom, L., Semwal, P., Painuli, S., Sharma, R., Gupta, A. (2023). Emergence of monkeypox: a worldwide public health crisis. *Hum Cell*, 36(3), 877–93.
- [16] Vargas-De-León, C. (2011). On the global stability of SIS, SIR and SIRS epidemic models with standard incidence. *Chaos, Solitons & Fractals*, 44(14), 1106–1110.
- [17] TeWinkel, R. E. (2019). *Stability analysis for the equilibria of a monkeypox model* University of Wisconsin-Milwaukee, Doktora Tezi.
- [18] Peter, O. J., Oguntolu, F. A., Ojo, M. M., Oyeniyi, A. O., Jan, R., & Khan, I. (2022). Fractional order mathematical model of monkeypox transmission dynamics. *Physica Scripta*, 97, 084005.
- [19] Riccardi, M. (2009). Solution of cubic and quartic equations. *Formalized Mathematics*, 17(2), 117–122.
- [20] Usman, S., & Isa Adamu, I. (2017). Modeling the transmission dynamics of the monkeypox virus infection with treatment and vaccination interventions. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 5(12), 2335–2353.
- [21] Demir, M. (2025). Modeling monkeypox: Spread of outbreak with social distancing, quarantine and vaccination. *Bitlis Eren Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi*, 14(1), 361–384.
- [22] Sah, R., Abdelaal, A., Reda, A., Katamesh, B. E., Manirambona, E., Abdelmonem, H., Mehta, R., Rabaan, A. A., Alhumaid, S., Alfouzan, W. A., Alomar, A. I., Khamis, F., Alofi, F. S., Aljohani, M. H., Alfaraj, A. H., Alfaresi, M., Al-Jishi, J. M., Als Salman, J., Alynbiawi, A., Rodriguez-Morales, A. J. (2022). Monkeypox and its possible sexual transmission: Where are we now with its evidence? *Pathogens*, 11(8), 924.
- [23] Idisi, O. I., Enahoro, A. I., Ariana, R., Rachel, R., DeAndrea, I., Jailyn, C., Jala, H., Maati, M., Nianza, H., Reyla, P., Zoe, D., Folashade, B. A., Bismark, O., Lanre, A. (2023). A new compartmentalized epidemic model to analytically study the impact of awareness on the control and mitigation of the monkeypox disease. *Healthcare Analytics*, 4(2023), 100267.

ÖZGEÇMİŞ

Abdulkadir YILMAZ ilk, orta ve lise eğitimini Giresunda tamamladı. 2019 yılında Giresun Nurettin Canikli Anadolu İmamhatip Lisesi'nden mezun oldu. 2019 yılında başladığı Giresun Üniversitesi Matematik Bölümü'nü 2023 yılında bitirdi. 2023 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen öğrenci olarak öğrenimine devam etmektedir.