

Diferansiyel Denklemler

İÇİNDEKİLER

Bölüm 1	Temel Tanım ve Kavramlar	4
1.1	Genel Matematik Tekrarı	5
1.2	Diferansiyel Denklemler ile İlgili Temel Tanımlar	12
1.3	Bazı Matematiksel Modeller; Doğrultu Alanları ve Çözüm Eğrileri	26
1.4	Bölüm Problemleri	30
Bölüm 2	Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler	31
2.1	Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler	32
2.2	Birinci Mertebeden Değişkenlerine Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler	38
2.3	Birinci Mertebeden Homojen Tipte Denklemler	43
2.4	Birinci Mertebeden Tam Diferansiyel Denklemler	48
2.5	Tam Olmayan Ama Tam Şekle Dönüştürülebilen Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler*	54
2.6	Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları	58
2.7	Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Farkı*	65
2.8	Bernoulli ve Riccati Diferansiyel Denklemleri*	74
2.9	Bölüm Problemleri	81
Bölüm 3	İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler	82
3.1	Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler	83
3.2	Mertebe Düşürülmesi ile Çözüm	87
3.3	Cauchy Euler Diferansiyel Denklemleri	94
3.4	Homojen Olmayan Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemler	98
3.5	İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları*	103
3.6	İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel Denklemler*	105
3.7	Bölüm Problemleri	108
Bölüm 4	Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler*	109
4.1	Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler	110

4.2	Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemler . . .	114
-----	--	-----

Bölüm 5	Laplace Dönüşümleri	118
----------------	----------------------------	------------

5.1	Laplace Dönüşümlerine Giriş	119
5.2	Ters Laplace Dönüşümleri	127
5.3	Laplace Dönüşümleri ile Diferansiyel Denklemlerin Laplace ile Çözümü	134
5.4	Parçalı Fonksiyon İçeren Diferansiyel Denklemlerin Laplace ile Çözümü	141
5.5	Dirac-Delta Fonksiyonu İçeren Diferansiyel Denklemlerin Laplace ile Çözümü	150
5.6	İntegral İçeren Diferansiyel Denklemlerin Laplace ile Çözümü*	155
5.7	Bölüm Özeti	163
5.8	Bölüm Problemleri	164

Bölüm 6	Lineer Diferansiyel Denklemler Sistemi*	165
----------------	--	------------

6.1	Lineer Sistemlere Giriş	166
6.2	Lineer Diferansiyel Denklemler Sistemlerinin Eleme Yöntemi ile Çözümü:	180
6.3	Homojen Lineer Sistemler	184
6.4	Homojen Olmayan Lineer Sistemler	198
6.5	Üstel Matris Fonksiyonu	204

Bölüm 1 Temel Tanım ve Kavramlar

Bu bölümde neler öğreneceğiz:

- Bölüm 1.1:
 - Bir değişkenli fonksiyonlar
 - Bir değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği
 - Bir değişkenli fonksiyonların türevi ve integral formülleri
 - Çok değişkenli fonksiyonların türevi
- Bölüm 1.2:
 - Diferansiyel denklemlerin tanımı
 - Diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması
 - Diferansiyel denklemlerin çözümü
- Bölüm 1.3:
 - Diferansiyel denklemlerin günlük hayattan uygulamaları
- Bölüm 1.4:
 - Bölüm problemleri

1.1 Genel Matematik Tekrarı

Bugünün Kazanımı:

- Bir değişkenli fonksiyonlar
- Bir değişkenli fonksiyonların limiti ve sürekliliği
- Bir değişkenli fonksiyonların türevi ve integral formülleri
- Çok değişkenli fonksiyonların türevi

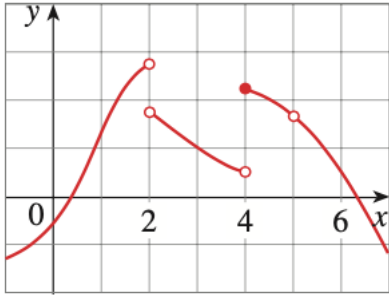
Bir Değişkenli Fonksiyonlar

(a) $y = f(x)$ fonksiyonu için

- x bağımsız değişken
- y bağımlı değişken
- $x, y \in \mathbb{R}$
- Tanım ve görüntü kümeleri reel sayılar
- Grafiğini çizmek için xy -düzlemini kullanınız

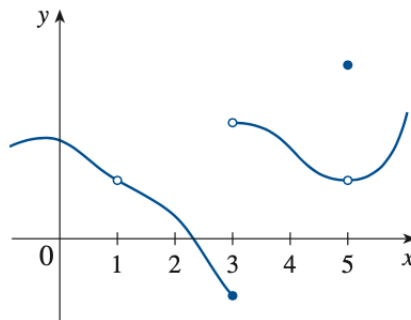
(b) Bir fonksiyonun limiti

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \implies \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



(c) Bir fonksiyonun a noktasında sürekliliği

- $f(a)$ tanımlı olacak
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ var olacak
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$



Bir Değişkenli Fonksiyonların Türevi

a ve c reel sayılar olsun:

(a) $f(x) = c$ ise $f'(x) = 0$

(b) $f(x) = x^n$ ise $f'(x) = nx^{n-1}$

(c) $g(x) = cf(x)$ ise $g'(x) = cf'(x)$

(d) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

(e) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$ (Çarpım Kuralı)

(f) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ (Bölüm Kuralı)

(g) $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ (Zincir Kuralı)

(h) $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) ise f artan (azalan) bir fonksiyondur.

(i) **Trigonometrik Fonksiyonların Türevi:** a bir reel sayı olsun.

- $f(x) = \sin(ax)$ ise $f'(x) = a \cos(ax)$
- $f(x) = \cos(ax)$ ise $f'(x) = -a \sin(ax)$
- $f(x) = \tan(ax)$ ise $f'(x) = a \sec^2(ax)$
- $f(x) = \sec(ax)$ ise $f'(x) = a \sec(ax) \tan(ax)$
- $f(x) = \cot(ax)$ ise $f'(x) = -a \csc^2(ax)$
- $f(x) = \csc(ax)$ ise $f'(x) = -a \csc(ax) \cot(ax)$

Bir Değişkenli Fonksiyonların Türevi**(j) Üstel Fonksiyonların Türevi**

- $f(x) = a^x$ ise $f'(x) = \ln(a)a^x$
- $f(x) = e^x$ ise $f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^{g(x)}$ ise $f'(x) = \ln(a)g'(x)a^{g(x)}$
- $f(x) = e^{g(x)}$ ise $f'(x) = g'(x)e^{g(x)}$

(k) Logaritmik Fonksiyonların Türevi

- $f(x) = \log_a(x)$ ise $f'(x) = \frac{1}{\ln(a)x}$
- $f(x) = \ln(x)$ ise $f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \log_a(g(x))$ ise $f'(x) = \frac{g'(x)}{\ln(a)g(x)}$
- $f(x) = \ln(g(x))$ ise $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Bir Değişkenli Fonksiyonların İntegrali

c ve K reel sayılar olsun:

$$(a) \int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$(b) \int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$(c) \int c dx = cx + K$$

$$(d) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K, \quad n \neq -1$$

$$(e) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + K, \quad x \neq 0$$

(f) **Trigonometrik Fonksiyonlar**

$$\bullet \int \cos(x) dx = \sin(x) + K$$

$$\bullet \int \sin(x) dx = -\cos(x) + K$$

$$\bullet \int \tan(x) dx = -\ln |\cos(x)| + K$$

$$\bullet \int \cot(x) dx = \ln |\sin(x)| + K$$

$$\bullet \int \sec(x) dx = \ln |\sec(x) + \tan(x)| + K$$

$$\bullet \int \csc(x) dx = \ln |\csc(x) - \cot(x)| + K$$

$$\bullet \int \sec^2(x) dx = \tan(x) + K$$

$$\bullet \int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + K$$

$$\bullet \int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + K$$

$$\bullet \int \csc(x) \cot(x) dx = -\csc(x) + K$$

Bir Değişkenli Fonksiyonların İntegrali

- $\int \sec^3(x) dx = \frac{1}{2} (\sec(x) \tan(x) + \ln |\sec(x) + \tan(x)|) + K$
- $\int \csc^3(x) dx = \frac{1}{2} (-\csc(x) \cot(x) + \ln |\csc(x) - \cot(x)|) + K$

(g) Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar

- $\int e^x dx = e^x + K$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + K$
- $\int \ln x dx = x \ln x - x + K$
- $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + K$

(h) Belirli Integral Kuralları

a ve b reel sayılar olsun.

- $\int_a^b x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$
- $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x f(t) dt \right) = f(x)$ (Analizin Temel Teoremi-I)
- $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$ (Analizin Temel Teoremi-II)
- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
- $a \leq c \leq b$ ise $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

Çok Değişkenli Fonksiyonlar

(a) $u = u(x, y)$ fonksiyonu için

- x, y bağımsız değişken
- u bağımlı değişken
- Tanım kümesi $\mathbb{R}^2$ ve görüntü kümesi ise reel sayıdır
- Grafiği çizmek için 3 boyutlu xyz -koordinat sistemini kullanırız.

(b) $u = u(x, y, z)$ fonksiyonu için

- x, y, z bağımsız değişken
- u bağımlı değişken
- Tanım kümesi $\mathbb{R}^3$ ve görüntü kümesi ise reel sayıdır

(c) **Çok Değişkenli Fonksiyonların Türevi**

- $\frac{\partial u}{\partial x}$ bulmak için sadece x 'e göre türev alıp diğer değişkenleri sabit gibi düşünüyoruz

- Örneğin $u = u(x, y, z)$ için $u = 2e^x z + y^2 z + x^3 y^2$ ise

$$\frac{\partial u}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} =$$

1.2 Diferansiyel Denklemler ile İlgili Temel Tanımlar

Bugünün Kazanımı:

Diferansiyel denklemlerin

- Tanımı
- Sınıflandırılması, türevin mertebesi
- Genel çözümü, özel çözümü, aykırı çözümü
- Örnekler

- **Notasyon:**

- $y = f(x)$ fonksiyonunda f bağımlı değişken x bağımsız değişkendir.

- $y = y(x)$ ya da $y = y(t)$

- **Türevin gösterimi**

- Birinci mertebeden türev: y' veya $y^{(1)}$ veya $\frac{dy}{dx}$ ve “ y ’nin x ’e göre birinci türevi” şeklinde okunur.

- İkinci mertebeden türev: y'' veya $y^{(2)}$ veya $\frac{d^2y}{dx^2}$ ve “ y ’nin x ’e göre ikinci türevi” şeklinde okunur.

- **Adi diferansiyel denklemler(ADD)** bir bilinmeyen fonksiyon, onun türevi/türevleri ve sadece bir bağımsız değişkenden oluşur.

- **Örnek 1.1** $y = y(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve x bağımsız değişken olsun.

$$y'(x) + e^x = 0$$

$$y''(x) + y(x) = \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} = 0$$

- Diferansiyel denklemlerler üç şekilde sınıflandırılır
 - (a) Türev Mertebesi
 - (b) Lineer(Doğrusal)/Lineer olmayan
 - (c) Adi/Kısmi

- **Türev Mertebesi:** Diferansiyel denklemin en yüksek dereceden türevidir

- **Örnek 1.2**

(a) $y'(t) + e^t = 0$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} + xy = 0$

(b) $3y'' - ty = \sin(t)$

(d) $-(y'')^3 - ty' = \sin(t)$

- **Lineerlik:** $y = y(t)$ bilinmeyen fonksiyonu ve t bağımsız değişkeni için **lineer** diferansiyel denklemlerin formu:

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + a_{n-2}(t)y^{(n-2)} + \cdots + a_2(t)y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t) \quad (1.1)$$

Burada $a_0, a_1, \dots, a_n, f : t'$ ye bağlı fonksiyon yada sabit sayıdır

- Diferansiyel denklemlerin **lineerliği(doğrusallığı)** için 2 şart sağlanması gerekir:
 1. Katsayılar ve f sadece bağımsız değişkenlerden veya sabit sayılardan oluşacak
 2. Bilinmeyen fonksiyon y nin ve türevlerinin üzerinde bir kuvvet olmayacak

- **Not:** Eğer (1.1) denkleminde $f(t) = 0$ ise, denkleme **n. mertebeden lineer homojen** diferansiyel denklemi denir.

- **Örnek 1.3**

(a) $ty'' + \sin(t)y = 0$

(b) $t(y'')^2 + \sin(t)y' = 0$

(c) $yy''' + y'' - 5y = e^t$

(d) $t^5y''' - 3y'' + 8ty - \cos t = 0$

(e) $y^{(4)} + 4ty^{(2)} + y^{(1)} = e^{t^2}$

- **Adi/Kısmi:**

- Adi diferansiyel denklemler bir bilinmeyen fonksiyon, onun türevleri ve bir bağımsız değişken içerir.
- Kısmi diferansiyel denklemler ise en az bir bağımlı değişken(bilinmeyen fonksiyon), onun türevleri ve birden fazla bağımsız değişken içerir.
- Adi diferansiyel denklemlerde y' veya $\frac{dy}{dx}$ kullanılırken, kısmi diferansiyel denklemlerde $\frac{\partial u}{\partial x}$ veya u_x kullanılır ve “ u ’nun x ’e göre kısmi türevi” şeklinde okunur.

- **Örnek 1.4** Aşağıdaki diferansiyel denklemleri sınıflandırınız.

	mertebesi	lineer	adi/kısmi	homojen
$y' + 3y = e^t$				
$y'' + ty^2 + y' = 0$				
$\frac{d^3y}{dx^3} - 3\frac{dy}{dx} = \sin(x)$				
$u_{xx} + -3u_t = u_x$				
$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t}$				
$(y''')^2 - yy'' + 3y = \cos t$				

- **Diferansiyel denklemin çözümü:**

- Bir diferansiyel denklemi sağlayan fonksiyona o diferansiyel denklemin **çözümü** denir.
- Benzer şekilde diferansiyel denklemi sağlayan ve içerisinde bir ya da daha fazla keyfi sabit bulunduran ve bu nedenle bir eğri ailesini oluşturan çözüme **genel çözüm** denir.
- Genel çözümden elde edilen her bir çözüm ise **özel çözüm** adını alır.
- Eğer diferansiyel denklemin herhangi bir çözümü, genel çözümdeki sabitlere değerler atanarak elde edilemiyorsa bu çözüm **aykırı çözüm** adını alır.

- Tüm diferansiyel denklem tiplerine uygulanabilen genel bir çözüm yöntemi ne yazık ki mevcut değildir. Çeşitli sınıflara ayrılan diferansiyel denklemler için bunlara özgü çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.

• **Örnek 1.5**

$$y = e^{2x}$$

ifadesinin $(-\infty, +\infty)$ aralığında

- (a) y' hesaplayınız.
- (b) $y' - 2y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

• **Örnek 1.6**

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

ifadesinin

- (a) hangi x değerleri için geçerli olduğunu(tanım kümesini) irdelleyiniz.
- (b) y' hesaplayınız.
- (c) $yy' + x = 0$ diferansiyel denklemi için bir çözüm olup olmadığını gösteriniz.

Örnek 1.7 Genel çözümü $2y = x^2 + cy^2$ olan birinci mertebeden diferansiyel denklemi bulunuz.

• **Örnek 1.8**

$$y = Cxe^{2x} + 2x - 3$$

ifadesinin

- (a) y' hesaplayınız.
- (b) y'' hesaplayınız.
- (c) $y'' - 4y' + 4y = 8x - 20$ diferansiyel denkleminin herhangi bir C sabiti için çözümü olduğunu gösteriniz.

• **Örnek 1.9**

$$(y')^2 = 4y$$

diferansiyel denklemi için

- (a) $y = (x + C)^2$ ifadesinin herhangi bir C sabiti için çözüm olduğunu gösteriniz.
- (b) Ayrıca $y = 0$ ifadesinin de aykırı çözüm olduğunu gösteriniz.

1.3 Bazı Matematiksel Modeller; Doğrultu Alanları ve Çözüm Eğrileri

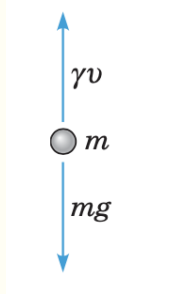
Bugünün Kazanımı:

- Günlük hayattan uygulamalar
- Bir diferansiyel denklemin çözmeden çözüm hakkında bilgi sahibi olabilir miyiz?

- **Not:** Eğer $y' > 0$ ise y artan bir fonksiyon.

- **Not:** Eğer $y' < 0$ ise y azalan bir fonksiyon.

- **Örnek 1.10(Düşen Cisim)** Bir cismin yukarıdan düştüğünü varsayalım. Newtonun 2. yasası bu cismin hareketini hesaplar, $F_{net} = ma$. Burada m kütle ve $a(m/s^2)$ ise yer çekimine bağlı ivme ve $g = 9.8m/s^2$, $m = 10$ kg ve $\gamma = 2$ kg/s olduğunu varsayarsak, modelimiz:



$$F_{net} = mg - \gamma v$$

$$ma = mg - \gamma v$$

$$m \frac{dv}{dt} = 9.8m - \gamma v$$

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{1}{5}v$$

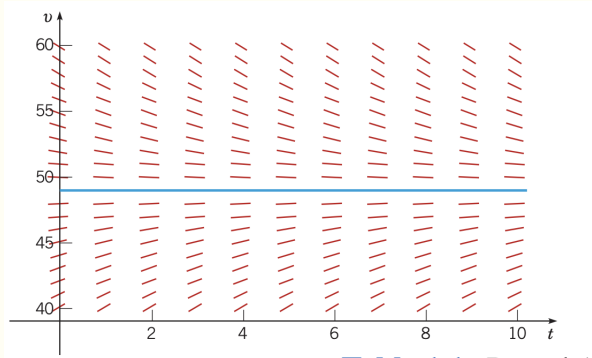


Table 1.1: Bazı değerler ve doğrultu alanı

(t, v)	$v'(t) = f(t, v)$
(1,40)	1.8
(2,45)	0.8
(6,48)	0.2
(2,60)	-2.2
(4,55)	-1.2
(6,50)	-0.2
(8,49)	0

$$v' = 9.8 - 0.2v$$

- **Örnek 1.11** Her saat başı sayısı iki katına çıkan amip popülasyonunu ele alalım. Bu büyümenin bir modellemesini yapalım:

- **Örnek 1.12 (Tarla Fareleri ve Baykuşlar)** Kırsal bir bölgede tarla faresi popülasyonunu ele alalım. Avcı baykuşların olmadığını varsayarsak fare popülasyonun belli bir oranda arttığını görürüz. Eğer fare popülasyonuna p ve zamana da t dersek, fare popülasyonunun zamana bağlı değişimini

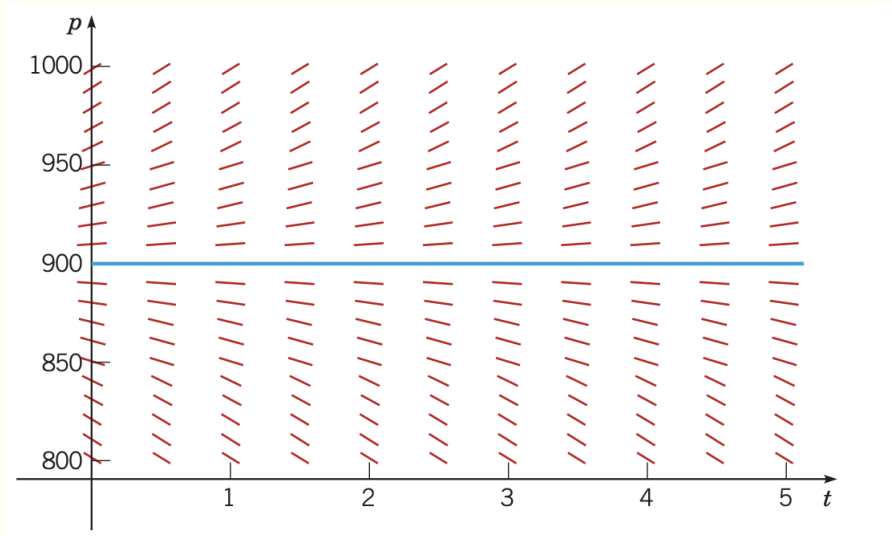
$$\frac{dp}{dt} = kp$$

ile gösterebiliriz. Zamanın ay ile ölçüldüğünü ve k oranının 0.5/ay olduğunu, ayrıca baykuşların günde 15 fare yediğini varsayarsak, yeni modelimiz

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{2} - 450$$

(t, p)	$p'(t) = f(t, p)$
(0,100)	-400
(2,300)	-300
(6,800)	-50
(9,900)	0
(10, 950)	25
(12,970)	35
(15,1000)	50

Table 1.2: Bazı değerler



1.4 Bölüm Problemleri

1. Bağımlı ve bağımsız değişken nedir, bir fonksiyonda bunları birbirinden nasıl ayırt edersiniz?
2. Adi ve kısmi diferansiyel denklemler arasında ne fark vardır?
3. Aşağıdaki kavramları, her birine örnekler vererek, açıklayınız.
 - (a). Adi diferansiyel denklem
 - (b). Kısmi diferansiyel denklem
 - (c). Derece, mertebe
 - (d). Homojen diferansiyel denklem
 - (e). Lineer diferansiyel denklem
 - (f). Lineer olmayan diferansiyel denklem
 - (g). Genel çözüm
 - (h). Özel çözüm
 - (i). Tekil çözüm
4. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin mertebelerini, lineer olup olmadıklarını, ve homojen olup olmadıklarını belirtiniz.
 - (a). $y''' + 3y = 8x$, $y'' + 3xy'y = 0$, $y'' + 2e^x y = 0$, $xy''' + 2xy' - 5xy = x^3$
 - (b). $y'' + 2y' = \sin x + 1$, $y'' - e^{2x-y} = 0$, $y'' + 2y' = e^x \cot x$, $yy'' + 2xe^x yy' - 5y = 0$
5. Verilen fonksiyonların yanındaki diferansiyel denklemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.
 - (a). $y'' = 0$, $y_1 = 5x$ ve $y_2 = 2x + 1$
 - (b). $y'' - 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$ ve $y_2 = -3e^{-2x}$
 - (c). $y'' - y = 0$ $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$ ve $y_3 = \cosh x$
 - (d). $y'' - 4y' + 4y = 0$ $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ ve $y_3 = 5xe^{-\ln x} e^{2x}$

Bölüm 2 Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz

- Bölüm 2.1:
 - Lineer diferansiyel denklemlerin formu
 - Bu tür denklemleri **integral çarpanı yöntemi** ile çözmek
- Bölüm 2.2:
 - Ayrılabilir diferansiyel denklemlerin formu
 - Bu tür denklemlerin çözümü
- Bölüm 2.3:
 - Homojen tipte diferansiyel denklemlerin formu
 - Bu tür denklemlerin çözümü
- Bölüm 2.4:
 - Tam diferansiyel denklemlerin formu
 - Bu tür denklemlerin çözümü
- Bölüm 2.5:
 - Tam olmayıp ama tam diferansiyel denklem şekline dönüştürülebilen diferansiyel denklemler
 - Bu tür denklemlerin çözümü
- Bölüm 2.6
 - Birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin uygulamaları
- Bölüm 2.7:
 - Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemlerin farkı
- Bölüm 2.8:
 - Bazı özel diferansiyel denklemler – Bernoulli ve Riccati
- Bölüm 2.9:
 - Bölüm problemleri

2.1 Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

Bugünün Kazanımı:

- Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin formu
- Bu tür diferansiyel denklemlerin integral çarpanı yöntemi ile çözümü
- Örnekler

- $y = y(t)$ bilinmeyen fonksiyon, a, b, c, p ve q, t' ye bağlı sürekli fonksiyonlar olsun. Birinci dereceden lineer diferansiyel denklemin formu

$$a(t)y'(t) + b(t)y = c(t) \quad (2.1)$$

ya da

$$y'(t) + p(t)y = q(t) \quad (2.2)$$

- **Adımlar:**

- **Adım 1:** Denklem her zaman (2.2) formunda olmalı. Eğer değilse o forma çevrilmeli.

- **Adım 2:** Adım 1'deki denklemin her iki tarafını integral çarpanı $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ ile çarpın ve onu

$$(\mu(t)y(t))' = \mu(t)q(t)$$

formuna çevirin

- **Adım 3:** Adım 2'deki denklemde her iki tarafın integrali alınır ve denklem çözülür. Yani çözüm

$$\int (\mu(t)y(t))' = \int \mu(t)q(t)$$

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + C$$

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)q(t)dt + \frac{C}{\mu(t)}$$

- **Örnek 2.1** $v = v(t)$ için aşağıdaki diferansiyel denkleminin çözümünü bulalım.

$$v' = 9.8 - \frac{1}{5}v$$

- **Örnek 2.2** $y = y(t)$ için tarla faresi popülasyonu için kullandığımız

$$y' = \frac{1}{2}y - 450, \quad y(0) = 800$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

- (a) Başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.
- (b) Popülasyonun kaç ay sonra sıfır olacağını hesaplayınız.

- **Örnek 2.3** Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$(t + 1)y' + y = 5(t + 1)t^2, \quad y(2) = 3$$

- **Örnek 2.4** Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$ty' + (t + 1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1$$

2.2 Birinci Mertebeden Değişkenlerine Ayrılabilir Diferansiyel Denklemler

Denklemler

Bugünün Kazanımı:

- Değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemlerin formu
- Bu tür diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemi
- Örnekler

- $y = y(t)$ bilinmeyen fonksiyonu için değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denklemin formu

$$y' = g(y)h(t)$$

şeklindedir.

- Değişkenleri sağ ve sol tarafa ayırıp her iki tarafı integralleyerek çözmüş oluyoruz. Yani aşağıdaki adımları izliyoruz:

- $y' = g(y)h(t)$

- $\frac{dy}{dt} = g(y)h(t)$

- $\frac{dy}{g(y)} = h(t)dt$

- $\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(t)dt$

- **Örnek 2.5** Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$y' = yt^2, \quad y(2) = 1$$

- **Örnek 2.6** Aşağıdaki diferansiyel denklemi çözünüz.

$$y' = y^2 \sin t$$

- **Örnek 2.7** Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$y' = \frac{3x^2 + 4x - 4}{2y - 4}, \quad y(1) = 3$$

2.3 Birinci Mertebeden Homojen Tipte Denklemler

Bugünün Kazanımı:

- Homojen tip diferansiyel denklemin tanımı
- Bu tür diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemi
- Örnekler

- Değişkenlerine ayrılabilir forma getirilebilecek diferansiyel denklemlerden biri de homojen tipte olanlardır.

- Birinci mertebeden diferansiyel denklem

$$y' = f(x, y) \quad (2.3)$$

için, Eğer $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ ise, bu denkleme **homojen tip** denklem denir.

- Örneğin, $y' = \frac{y - x}{y + x}$

- Diğer taraftan,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.4)$$

formunda verilmiş ve

$$M(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n M(x, y) \quad \text{ve} \quad N(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n N(x, y)$$

ise, (2.4) denkleminde **homojen tip** diferansiyel denklem denir.

- Homojen bir diferansiyel denklemi çözerken $y = vx$ dönüşümünü yapıp, her iki yanın x 'e göre türevini alıp; mevcut homojen tipte diferansiyel denklemi, değişkenlerine ayrılabilir diferansiyel denkleme dönüştüreceğiz.

- **Örnek 2.8** Aşağıdaki başlangıç değer problemini çözünüz.

$$(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0, \quad y(2) = 1$$

- **Örnek 2.9** Aşağıdaki diferansiyel denklemi çözünüz.

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

2.4 Birinci Mertebeden Tam Diferansiyel Denklemler

Bugünün Kazanımı:

- Tam diferansiyel denklemlerin formu ve şartı
- Bu tür diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemi
- Örnekler

- Aşğıdaki denklemi ele alalım:

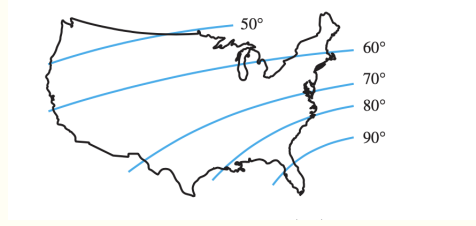
$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.5)$$

- **Teorem:** (2.5) diferansiyel denkleminin tam diferansiyel denklemi olması için

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

şartının sağlanması gerekir.

- $F(x, y)$, xy - düzleminde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon, örneğin sıcaklık gibi, xy - düzleminde dağılım gösteren bir fiziksel niceliğe karşılık geliyor olabilir. Örneğin $F(x, y) = 60^\circ$ veya $F(x, y) = C^\circ$



- Öncelikle $F(x, y) = C$ eşitliğinin her iki tarafını x e göre türev alalım. y nin x e bağlı olduğu da dikkate alınmalıdır.

- Kapalı fonksiyonun türevi formülünden(zincir kuralı)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}F(x, y) &= \frac{d}{dx}(C) \\ \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy &= 0 \\ M(x, y)dx + N(x, y)dy &= 0\end{aligned}$$

- **Örnek 2.10** $(2xy^2 + 1)dx + 2x^2ydy = 0$

- **Örnek 2.11** Aşağıdaki diferansiyel denklemi çözünüz

$$(2x + 3y^3)dx + (y^2 + 9xy^2)dy = 0$$

- **Örnek 2.12** $\left(\frac{3x^2y + 1}{y}\right) dx - \left(\frac{x}{y^2}\right) dy = 0$, $y(2) = 1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

2.5 Tam Olmayan Ama Tam Şekle Dönüştürülebilen Birinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler*

Bugünün Kazanımı:

- Tam olmayan diferansiyel denklemleri tam denklem haline getirmek
- Örnekler

- Eğer denklem tam değilse, denklemi uygun bir integral çarpanı ile çarpıp onu tam diferansiyel denklem haline dönüştürebiliriz.

•

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (2.6)$$

denklemi bundan önceki yöntemlerle çözilemiyor ve aynı zamanda da tam diferansiyel değilse

•

$$g = \frac{M_y - N_x}{N} \quad \text{ve} \quad h = \frac{N_x - M_y}{M}$$

buluyoruz.

- **Durum 1:** Eğer g sadece x e bağlı bir fonksiyon ise, (2.6) denkleminin her iki tarafını integral çarpanı

$$\mu(x) = e^{\int g(x)dx}$$

ile çarpılarak tam diferansiyel hale getirilebilir.

- **Durum 2:** Eğer h sadece y e bağlı bir fonksiyon ise (2.6) denkleminin her iki tarafını integral çarpanı

$$\mu(y) = e^{\int h(y)dy}$$

ile çarpılarak tam diferansiyel hale getirilebilir.

- Durum 1 veya Durum 2'den elde edilen denklem tam diferansiyel denklemlerde kullandığımız yöntemle çözülür.

- **Örnek 2.13** Aşağıdaki denklemi çözünüz

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$$

- **Örnek 2.14** Aşağıdaki denklemi çözünüz

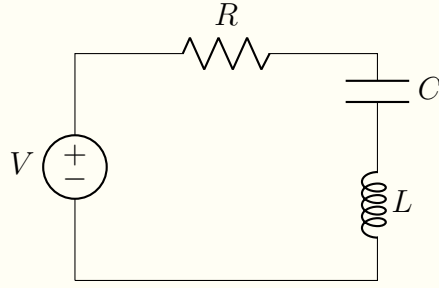
$$(y^2 + 2xy)dx - x^2dy = 0$$

2.6 Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları

Bugünün Kazanımı:

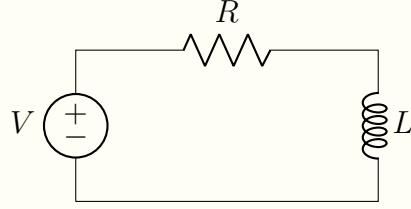
- Devreler üzerinde uygulamaları
- Karışım problemleri üzerinde uygulamaları

- Elektrik devrelerini hatırlayalım

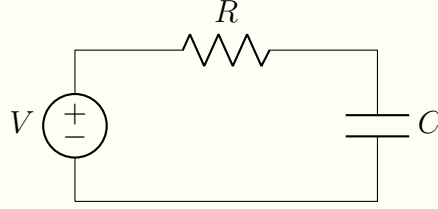


Voltaj(V)	Akım(I)	Direnç(R)	Kondansatör(C)	Endüktör(Bobin)(L)	Elektrik Yüğü(q)
volt	amper	ohm	farad	henry	coulombs
	$i = q'(t)$	$V = i \cdot R$	$i(t) = Cv'(t)$ veya $C = \frac{q}{V}$	$V(t) = L \cdot i'(t)$	$q = i \cdot t$

- **Örnek 2.15** Seri olarak bağlı bobin ve dirençten kurulu aşağıdaki devreyi ele alalım. Elektromotor kuvvetinin $V(t) = t^2$ şeklinde değiştiği bilinmektedir. $L = 3$ henry, $R = 15$ ohm olarak verildiğine ve $t = 0$ anında $i = 0$ amper olduğuna göre devreden geçen akımı zamanın fonksiyonu olarak bulunuz.

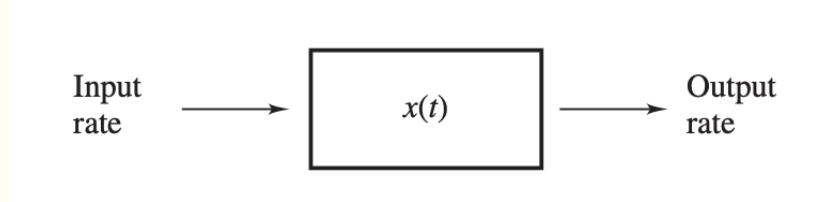


- **Örnek 2.16** Seri olarak bağlı direnç ve kondansatörden oluşan bir alternatif akım devresinde $R = 10\Omega$ $C = 10^{-3}$ farad ve $V(t) = 100 \sin 120\pi t$ olarak verildiğine ve $t=0$ anında $q=0$ olduğuna göre kondansatörde depolanan elektrik yükünün zamanın fonksiyonu olarak elde ediniz.

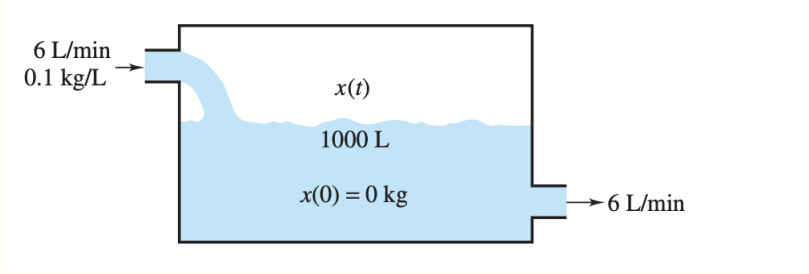


- **Kompartıman Analizi–Karışım Problemleri:** Basit tek kompartıman sistemi, t zamanında belli bir kompartıman içerisinde bulunan madde miktarını temsil eden $x(t)$ fonksiyonu, bu maddenin kompartımana girdi oranını ve çıktı oranını temsil eden bir sistemden oluşmaktadır.

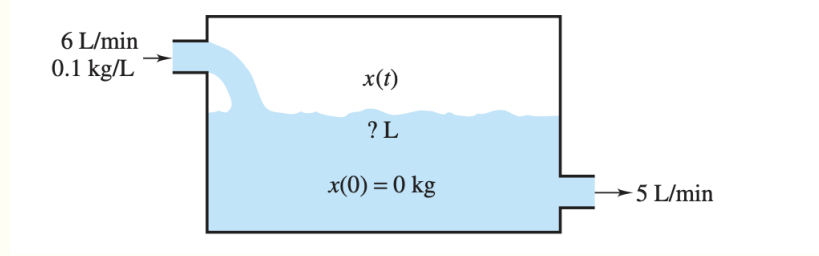
$$\frac{dx}{dt} = \text{girdi oranı} - \text{çıktı oranı}$$



- **Örnek 2.17** İçine dakikada 6 L oranında tuzlu su dökülen ve başlangıçta içinde 1000 L saf su bulunan büyükçe bir tank düşünelim. Tankın içindeki çözeltinin iyice karıştırılmış olduğu ve dakikada 6 L oranında sıvının dışarı çıktığını varsayalım. Eğer tankın içine akan tuz çözeltisindeki tuz konsantrasyonu 0.1 kg/L ise tankın içindeki tuz konsantrasyonu ne zaman 0.05 kg/L ulaşır.



- **Örnek 2.18** İçine dakikada 6 L oranında tuzlu su dökülen ve içinde başlangıçta 1000 L saf su bulunan büyükçe bir tank düşünelim. Tankın içindeki çözeltinin iyice karıştırılmış olduğu ve dakikada 5 L oranında sıvının dışarı çıktığını varsayalım. Bu durumda tanktaki tuz konsantrasyonunu zamana bağlı bir fonksiyon olarak hesap ediniz.



2.7 Lineer ve Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemlerin Farkı*

Bugünün Kazanımı:

- Lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler
- Lineer denklemlerin çözümü için varlık ve teklik teoremi
- Lineer olmayan denklemlerin çözümü için varlık ve teklik teoremi

- Şimdiye kadar öğrendiğimiz yöntemlerde ya genel çözümü bulduk ya da özel çözümü bulduk
- Ne zaman çözüm var, varsa kaç tane sorusunun cevabını da bu bölümde öğreneceğiz.
- Ayrıca lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler arasındaki farkları da göreceğiz

- **Örnek 2.19** $(y')^2 + y^2 = -1$

- **Örnek 2.20** $y' = y^{\frac{1}{3}}, \quad y(0) = 0$ denkleminin çözümleri

$$y_1 = \left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}} \quad y_2 = -\left(\frac{2}{3}t\right)^{\frac{3}{2}}.$$

- **Teorem (Birinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği):** p ve q sürekli fonksiyon, ve (α, β) aralığı da t_0 'i içeren bir aralık olsun. Bu durumda

$$y' + p(t)y = q(t), \quad y(t_0) = y_0$$

başlangıç değer problemini sağlayan tek bir y çözümü vardır.

- **Teorem (Birinci Dereceden Lineer Olmayan Diferansiyel Denklemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği):**

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

başlangıç değer problemi için $f(t, y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonları $\alpha < t < \beta$ ve $\gamma < y < \delta$ aralıklarında sürekli fonksiyonlar olsun. Ayrıca $\alpha < t_0 < \beta$ ve $\gamma < y_0 < \delta$ olsun. Bu durumda sağlayan tek bir y çözümü vardır.

- **Örnek 2.21** Yukarıda verdiğimiz uygun teoremi kullanarak

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad y(1) = 2$$

başlangıç değer probleminin tek bir çözümü olduğunu ve hangi aralıkta bu çözümün var olduğunu bulalım. Sonrasında $y(-1) = 2$ başlangıç şartı için soruyu tekrar çözelim.

- **Örnek 2.22** Yukarıda verdiğimiz uygun teoremi

$$y' = \frac{3t^2 + 4t + 2}{2(y - 1)} \quad y(0) = -1$$

başlangıç değer problemine uygulayalım. Sonrasında $y(0) = 1$ başlangıç şartı için soruyu tekrar çözelim.

- **Örnek 2.23** Yukarıda verdiğimiz uygun teoremi

$$y' = y^{\frac{1}{3}} \quad y(0) = 0$$

başlangıç değer problemine uygulayalım ve çözümünü(varsa) bulalım.

- **Örnek 2.24** Yukarıda verdiğimiz uygun teoremi

$$y' = y^2 \quad y(0) = 1$$

başlangıç değer problemine uygulayarak çözümünü ve çözümün varolduğu aralığı bulalım.

- **Özet:**

$$y' + p(t)y = q(t), \quad y(t_0) = y_0$$

(lineer denklem)

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

(lineer olmayan denklem)

- Lineer denklemlerde kat sayıların ve denklemin sağ tarafının sürekli olduğunu var sayarsak, keyfi C sayısını içeren ve diğer çözümleri de içeren bir genel çözümü vardır. Verilen başlangıç değerini sağlayan özel çözümler genel çözümünden rahatlıkla bulunur.
- Lineer denklemlerde çözümün süreksizlik noktaları, tekilliği; katsayıların süreksiz olduğu noktaları bularak karar verilebilir. Yani denklemi çözmeden de bir sürü bilgi sahibi olabiliriz.
- Fakat lineer olmayan denklemlerde bunların hiç birisi doğru değildir. Yani lineer olmayan bir denklemin keyfi C sayısının içeren bir çözümünü bulsak bile, başka bir çözüm olma olasılığı vardır.
- Lineer olmayan denklemlerde çözümün genel bir formülü yoktur. Ayrıca çözümün süreksizliği veya tekil çözümler ancak denklemi çözerek bulunabilir.

2.8 Bernoulli ve Riccati Diferansiyel Denklemleri*

Bugünün Kazanımı:

- Birinci mertebeden lineer olmayan bazı özel diferansiyel denklemler
 - Bernoulli DD formu
 - Riccati DD formu
- Bu denklemlerin çözüm yöntemleri
- Örnekler

- Aşağıdaki birinci mertebeden diferansiyel denklemi ele alalım

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = r(x) \quad (2.7)$$

- (2.7) denkleminde $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$, $r(x) \equiv 0$ ise,

$$y' + p(x)y + q(x)y^n = 0 \quad n \neq 0, n \neq 1 \quad (\text{Bernoulli})$$

- (Bernoulli) denkleminin her iki tarafını y^n bölün

- $u = y^{1-n}$ değişken dönüşümü yaparak denklemi birinci mertebeden lineer diferansiyel denkleme dönüştürüyoruz (Bknz bir sayfa sonraki örnek)

- **Örnek 2.25** Aşağıdaki Bernoulli diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz

$$y' + x^5 y + x^2 e^{x^6} y^7 = 0$$

- **Örnek 2.26** Aşağıdaki Bernoulli diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz

$$y' + \frac{4}{x}y = x^3y^2, \quad y(2) = -1, \quad x > 0.$$

- **Örnek 2.27** Aşağıdaki Bernoulli diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz

$$6y' - 2y = x^2y^4, \quad y(0) = -2.$$

- (2.7) denkleminde $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$, $r(x) \neq 0$, $n = 2$ ise,

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$$

(Riccati)

- $y = y_0 + \frac{1}{v}$

- Burada y_0 özel çözümdür

- **Örnek 2.28** Aşağıdaki Riccati diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. Özel çözüm olarak $y_0 = 1$ alınız.

$$y' - (2x - 1)y - (1 - x)y^2 = -x$$

2.9 Bölüm Problemleri

1. Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini, tüm adımları göstererek, çözünüz.

(a). $y' + y = 0, \quad y(0) = 1$

(c). $y' - 2ty = \cos 2t, \quad y(\pi) = 1$

(b). $y' - 2ty = e^t, \quad y(1) = 4$

2. Değişkenlerine ayrılabilir tipteki diferansiyel denklemleri çözünüz.

(a). $yy' = x^3 + 1$

(c). $y' + 2e^{x+y} = 0$

(b). $(x + 2)y' = y^2 + 2$

(d). $\frac{dy}{dx} = e^{2y} \cos 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

3. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin homojen olup olmadıklarını inceleyiniz.

(a). $y' = \frac{x + y}{x - y}$

(c). $y' = \frac{x^3 - 2xy^2}{xy}$

(b). $y' = \frac{x + 1}{x^2 + y}$

4. Aşağıdaki homojen (veya homojene indirgenebilir) diferansiyel denklemleri çözünüz.

(a). $y' = \frac{x}{x + y}$

(c). $y' = \frac{y}{x^2 - y^2} - 1, \quad y(1) = 0$

(b). $y' = \frac{x^3 - 4x^2y}{y^3}$

(d). $y' = \frac{x^2 - y^2}{2xy}, \quad y(0) = -2$

5. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin tam diferansiyel olup olmadıklarını inceleyiniz. Tam diferansiyel olanları çözünüz. Tam olmayan diferansiyel denklemleri tam şekle dönüştürüp çözünüz.

(a). $(3x + 1)dx + (3y - 1)dy = 0$

(b). $(2y^2 + 3x)dx + 2xydy = 0$

(c). $(3x^2 \sin y + xe^x) + (x^3 \cos y - y^2 + 1)y' = 0, \quad y(1) = -2$

(d). $(3y - 1) - (3x + 1)y' = 0$

(e). $(x + 2y) + (x - 2y)y' = 0$

(f). $(6xy)dx + (4y + 9x^2)dy = 0$

Bölüm 3 İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklemler

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz

- Bölüm 3.1:
 - İkinci mertebeden sabit katsayılı homojen lineer denklemlerin formu
 - Çözüm yöntemleri
- Bölüm 3.2:
 - Mertebe düşürülmesi yöntemini
- Bölüm 3.3:
 - Cauchy-Euler denkleminin formu
 - Çözüm yöntemini
- Bölüm 3.4:
 - İkinci mertebeden homojen olmayan lineer diferansiyel denklemlerin formu
 - Çözüm yöntemlerini
- Bölüm 3.5:
 - İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin uygulamaları
- Bölüm 3.6:
 - İkinci mertebeden lineer olmayan bazı diferansiyel denklemlerin çözümü
- Bölüm 3.7:
 - Bölüm problemleri

3.1 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler

Bugünün Kazanımı:

- İkinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemlerin formu
- Bu tür denklemlerin genel çözüm formu
- Lineer bağımsız fonksiyonların tanımı ve testi(Wronskian)
- Karakteristik denklem
- İkinci mertebeden sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemi
- Örnekler

- Bu bölümde $y = y(t)$ fonksiyonu için

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (3.1)$$

denkleminin nasıl çözüldüğünü öğreneceğiz. Burada a, b ve c sabit sayılardır.

- **Genel Çözüm Teoremi:** Eğer y_1 ve y_2 fonksiyonları bir aralıkta lineer bağımsız çözümler ise, (3.1) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

- **Wronksian (Lineer Bağımsızlık Testi) :** Belirli bir aralıkta verilen y_1 ve y_2 fonksiyonları, tüm t 'ler için ;

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

ise bu iki fonksiyon lineer bağımsızdır denir. Aksi halde lineer bağımlılık vardır.

- (3.1) denkleminin çözümü $y(t) = e^{rt}$ şeklindedir. Burada r bir reel sayıdır.

- Peki r nasıl bulunur? Karakteristik denklem:

$ar^2 + br + c = 0$	Çözümler	Genel çözüm
$r_1 \neq r_2$	$y_1 = e^{r_1 t}, \quad y_2 = e^{r_2 t}$	$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (W(y_1, y_2) \neq 0)$
$r_1 = r_2$	$y_1 = e^{r_1 t}, \quad y_2 = t e^{r_1 t}$	$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (W(y_1, y_2) \neq 0)$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_1 = e^{\alpha t} \cos \beta t, \quad y_2 = e^{\alpha t} \sin \beta t$	$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (W(y_1, y_2) \neq 0)$

- **Örnek 3.1** Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin genel çözümünü bulunuz. Eğer başlangıç değer problemi ise c_1 ve c_2 'yi de bulunuz.

(a) $y'' + y' - 2y = 0$

(b) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$

(c) $y'' - 2y' + 3y = 0$ $y(0) = \pi$, $y'(0) = \frac{\pi}{2}$

(d) $y'' - 2y' + 3y = 0$ $y(\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = 3$, $y'(\frac{\pi}{\sqrt{2}}) = 1$

3.2 Mertebe Düşürülmesi ile Çözüm

Bugünün Kazanımı:

- Denklemden sadece y'' ve y' mevcut ise mertebe düşürülmesi yöntemi
- Denklemden y olduğunda ikinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemlerin formu
- Bu tür denklemlerin mertebe düşürülmesi yöntemi ile çözümü
- Örnekler

- **Örnek 3.2 (Denklemden sadece y'' ve y' mevcut)** Aşağıdaki denklemi mertebe düşürme yöntemi ile çözünüz.

$$y'' + y' = e^{-2t}$$

- **Örnek 3.3 (Denklemden sadece y'' ve y' mevcut)** Aşağıdaki denklemi

$$ty'' - y' = t^2 \cos t$$

mertebe düşürme yöntemi ile çözünüz.

- Şimdi $y = y(t)$ ifadesi için (3.2) yi ele alalım.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (3.2)$$

- **Genel Çözüm Teoremi:** Eğer y_1 ve y_2 fonksiyonları bir aralıkta lineer bağımsız çözümler ise, (3.2) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

- Burada amaç ikinci dereceden denklemi birinci mertebeye indirerek bir önceki bölümde öğrendiğimiz yöntemleri uygulamak. Bu yöntemi uygularken bir tane çözümün y_1 'i bilmemiz gerekiyor.

- y_1 biliniyor ise, $y_2 = u \cdot y_1$ şeklinde olur. y_2 nin türevlerini alıp (3.2) de yerine koyarsak;

- y_2 'yi bulmak için formül ($y_2 = u(t) \cdot y_1$)

$$y_2(t) = y_1 \int \frac{e^{\int -p(t)dt}}{y_1^2} dt$$

- **Örnek 3.4** Aşağıdaki denklemin

$$y'' + xy' + \left(\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4}\right)y = 0$$

ilk çözümü $y_1 = e^{-\frac{x^2}{4}}$ ise, mertebe düşürme yöntemi ile ikinci çözümü ve genel çözümü bulunuz.

- **Örnek 3.5** Aşağıdaki denklemin

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$$

bir çözümü $y_1 = x^2$ ise, mertebe düşürme yöntemi ile çözümünü $(0, \infty)$ aralığında bulunuz.

3.3 Cauchy Euler Diferansiyel Denklemi

Bugünün Kazanımı:

- İkinci mertebeden diferansiyel denklemin özel formu: Cauchy Euler Denklemi
- Bu tür denklemlerin karakteristik denklemi
- Karakteristik denklemi kullanarak çözümü
- Örnekler

- Cauchy Euler denkleminin formu

$$at^2y'' + bty' + cy = 0 \quad (3.3)$$

- **Genel Çözüm Teoremi:** Eğer y_1 ve y_2 fonksiyonları bir aralıkta lineer bağımsız çözümler ise, (3.3) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c_1y_1 + c_2y_2.$$

- **Wronskian (Lineer Bağımsızlık Testi) :** Belirli bir aralıkta verilen y_1 ve y_2 fonksiyonları, tüm t 'ler için ;

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

ise bu iki fonksiyon lineer bağımsızdır denir. Aksi halde lineer bağımlılık vardır.

- Bu denklemin çözümü $y = t^r$ formundadır.
- Karakteristik denklemi:

Kökler	Çözümler	Genel çözüm
$r_1 \neq r_2$	$y_1 = t^{r_1}, y_2 = t^{r_2}$	$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2, (W(y_1, y_2) \neq 0)$
$r_1 = r_2$	$y_1 = t^{r_1}, y_2 = t^{r_1} \ln t$	$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2, (W(y_1, y_2) \neq 0)$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y_1 = t^\alpha \cos(\beta \ln t), y_2 = t^\alpha \sin(\beta \ln t)$	$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2, (W(y_1, y_2) \neq 0)$

- **Örnek 3.6** Aşağıdaki Cauchy Euler denklemlerini çözünüz.

(a) $t^2 y'' - 2ty' - 4y = 0$

(b) $4x^2 y'' + 8xy' + y = 0, \quad y(1) = 0, y'(1) = 2$

(c) $4x^2 y'' + 17y = 0, \quad y(1) = -1, y'(1) = -\frac{1}{2}$

3.4 Homojen Olmayan Sabit Katsayılı Lineer Diferansiyel Denklemler

Bugünün Kazanımı:

- İkinci mertebeden sabit katsayılı lineer ama homojen olmayan diferansiyel denklemlerin formu
- Bu tür denklemlerin genel çözüm formu
- Bu tür denklemlerin çözüm yöntemleri: Parametrenin değişimi yöntemi
- Örnekler

- Bu bölümde $y = y(t)$ ifadesi için

$$ay'' + by' + cy = g(t) \quad (3.4)$$

denklemini ele alacağız.

- **Genel Çözüm Teoremi:** Eğer g verilen aralıkta sürekli ise, (3.4) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c_1y_1 + c_2y_2 + y_0.$$

Burada y_1 and y_2

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

homojen denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve y_0 ise özel çözümdür ve amacımız y_0 'yı bulmaktır.

- Bunun için iki tane yöntem var
 - Belirsiz katsayılar yöntemi
 - Parametrenin değişim yöntemi*

- **Parametrenin değişim yöntemi:** (3.4) denklemleri için özel çözüm

$$y'' = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

formülü ile bulunur. Burada

$$u_1 = - \int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)} dt, \quad u_2 = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)} dt.$$

Dolayısıyla ile (3.4) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + u_1 y_1 + u_2 y_2$$

- **Örnek 3.7** Aşağıdaki

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{t} \quad y(1) = e, \quad y'(1) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümünü parametrenin değişim yöntemi ile bulunuz.

- **Örnek 3.8** Aşağıdaki

$$y'' + 4y = 8 \tan t$$

denkleminin genel çözümünü parametrenin değişim yöntemi ile $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ aralığında bulunuz.

3.5 İkinci Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemlerin Uygulamaları*

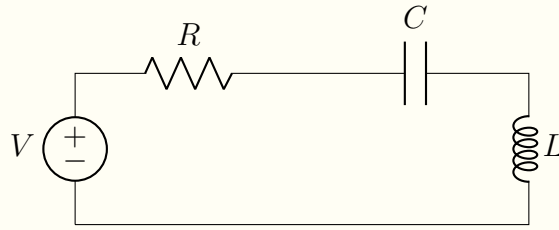
Bugünün Kazanımı:

- İkinci mertebeden lineer diferansiyel denklemlerin devreler üzerinde uygulamaları

- Bir elektrik devresinde bulunan V, R, C, L arasındaki ilişki

Voltaj(V)	Akım(I)	Direnç(R)	Kondansatör(C)	Endüktör(Bobin)(L)	Elektrik Yüğü(q)
volt	amper	ohm	farad	henry	coulombs
	$i = q'(t)$	$V = i \cdot R$	$i(t) = Cv'(t)$ veya $C = \frac{q}{V}$	$V(t) = L \cdot i'(t)$	$q = i \cdot t$

- **Elektrik Devreleri:** Kondansatördeki toplam elektrik yükü(q)



- Kirchoff Voltaj Kuralını kullanarak, elektrik yükünü aşağıdaki denklem ile hesaplayabiliriz

$$V_R + V_C + V_L = V$$

$$iR + \frac{q}{C} + L \cdot i'(t) = V(t)$$

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q = V(t)$$

3.6 İkinci Mertebeden Lineer Olmayan Bazı Diferansiyel

Denklemler*

Bugünün Kazanımı:

- İkinci mertebeden lineer olmayan bazı özel diferansiyel denklemler
 - Bağımlı değişken y denklemde olmadığında
 - Bağımsız değişken t denklemde olmadığında
- Bu denklemlerin çözüm yöntemleri
- Örnekler

- Bu tür denklemleri birinci mertebeden diferansiyel denklemlere çevirerek çözmeye çalışacağız. İki tane özel halimiz var

- **Durum 1:** Bağımlı değişken y denklemde açık olarak görünmüyorsa: Örneğin;

$$y'' = 2t(y')^2.$$

Bu durumda

$$u = y' \implies u' = y''$$

- **Durum 2:** Bağımsız değişken t denklemde açık olarak görünmüyorsa: Örneğin;

$$yy'' = (y')^2.$$

Bu durumda

$$u = y' \implies y'' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dt} = u \frac{du}{dy}$$

- **Örnek 3.9** Aşağıdaki lineer olmayan diferansiyel denklemleri çözünüz.

- $y'' = 2t(y')^2$

- $yy'' = (y')^2$

3.7 Bölüm Problemleri

1. Aşağıdaki homojen diferansiyel denklemlerin çözümünü bulunuz.

(a) $y'' + 2y + 1 = 0$, $y(0) = 1$ $y'(0) = 2$

(b) $y'' - 2y + 2 = 0$

(c) $y'' + 8 = 0$

(d) $y'' + 2y + 1 = 0$

2. Aşağıdaki Cauchy-Euler diferansiyel denklemlerinin çözümünü bulunuz.

(a) $x^2 y'' - 2y = 0$

(b) $x^2 y'' + xy' + 4y = 0$

(c) $3x^2 y'' + 6xy' + y = 0$

(d) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$, $y(1) = 5$, $y'(1) = 3$

(e) $x^2 y'' + xy' + y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$

3. Aşağıdaki homojen olmayan diferansiyel denklemlerinin çözümünü bulunuz.

(a) $y'' + y = \sec x$

(b) $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$

(c) $y'' + 2y' + y = e^{-t} \ln t$

Bölüm 4 Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler*

Bu bölümde neler öğreneceğiz:

- Bölüm 4.1:
 - Sabit katsayılı yüksek mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemlerin formu
 - Çözüm yöntemi
- Bölüm 4.2:
 - Sabit katsayılı yüksek mertebeden lineer homojen olmayan diferansiyel denklemlerin formu
 - Çözüm yöntemi

4.1 Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler

Bugünün Kazanımı:

- Sabit katsayılı yüksek mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemlerin formu
- Genel çözüm formu
- İki den fazla fonksiyonların lineer bağımsızlık şartı – Wronskian
- Çözüm yöntemi
- Örnekler

- n . mertebeden lineer homojen diferansiyel denklem formu

$$p_n(t)y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_2(t)y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = 0 \quad (4.1)$$

- Burada $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ sabit sayılar kabul edeceğiz.

- **Genel Çözüm Teoremi:** Eğer $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları (4.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$$

ifadesi de bu denklemin genel çözümüdür.

- **Wronskian(Linear Bağımsızlık Testi):** $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları için

$$W(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ise, $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları **lineer bağımsızdır** denir.

- **Örnek 4.1** Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin çözümünü bulunuz.

(a) $y''' + 3y'' - 4y = 0$

(b) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

(c) $y''' + 12y'' + 36y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -7$

4.2 Yüksek Mertebeden Sabit Katsayılı Homojen Olmayan Lineer Diferansiyel Denklemler

Bugünün Kazanımı:

- Sabit katsayılı yüksek mertebeden lineer homojen olmayan diferansiyel denklemlerin formu
- Genel çözüm formu
- Çözümü – Parametrenin değişimi yöntemi
- Örnekler

- n . mertebeden lineer homojen olmayan denklem

$$p_n(t)y^{(n)} + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + p_2(t)y'' + p_1(t)y' + p_0(t)y = g(t) \quad (4.2)$$

- Burada $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ sabit sayılar kabul edeceğiz. İkinci mertebeye benzer olarak yine parametrenin değişim yöntemini kullanacağız.

- **Genel Çözüm Teoremi:** (4.2) denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n + y_{\text{ö}}.$$

Burada $y_1, y_2, \dots, y_n$ homojen denklemin çözümü ve

$$y_{\text{ö}} = u_1y_1 + u_2y_2 + \dots + u_ny_n$$

özel çözümdür. Burada

$$u_1 = \int \frac{W_1}{W} dt, \quad u_2 = \int \frac{W_2}{W} dt, \dots, u_n = \int \frac{W_n}{W} dt$$

- Örneğin 3. mertebeden diferansiyel denklem için

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 & y_3 \\ 0 & y_2' & y_3' \\ g(t) & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 & y_3 \\ y_1' & 0 & y_3' \\ y_1'' & g(t) & y_3'' \end{vmatrix}, \quad W_3 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 0 \\ y_1' & y_2' & 0 \\ y_1'' & y_2'' & g(t) \end{vmatrix}$$

- **Örnek 4.2** Aşağıdaki diferansiyel denklemleri çözünüz.

(a) $y''' + 3y'' - 4y = e^{3t}$

(b) $y''' + y' = \tan x$

Bölüm 5 Laplace Dönüşümleri

Bu Bölümde Neler Öğreneceğiz

- Bölüm 5.1:
 - Laplace dönüşümlerine Giriş
- Bölüm 5.2:
 - Ters Laplace dönüşümleri
- Bölüm 5.3:
 - Laplace dönüşümlerini kullanarak diferansiyel denklemlerini çözmek
- Bölüm 5.4:
 - Parçalı fonksiyon içeren diferansiyel denklemlerin Laplace ile çözümü
- Bölüm 5.5:
 - İntegral içeren diferansiyel denklemlerin Laplace ile çözümü
- Bölüm 5.6:
 - Dirac-delta içeren diferansiyel denklemlerin Laplace ile çözümü
- Bölüm 5.7:
 - Bölüm özeti
- Bölüm 5.8:
 - Bölüm problemleri

5.1 Laplace Dönüşümlerine Giriş

Bugünün Kazanımı:

- Laplace integral formülü
- Has olmayan integraller
- Laplace dönüşümü nasıl yapılır
- Laplace dönüşümünün cebirsel özellikleri
- Örnekler

- Has olmayan(Improper) integral formu

$$\int_{t_0}^{\infty} f(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{t_0}^A f(t)dt$$

- **Tanım:** f fonksiyonu $t \geq 0$ aralığında tanımlı olsun. Bu durumda Aşağıdaki integral yakınsak olduğunda f fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

integrali ile ifade edilir.

- Aşağıdaki Laplace dönüşümlerini hesaplayınız.

(a) $\mathcal{L}\{1\} =$

(b) $\mathcal{L}\{t\} =$

(c) $\mathcal{L}\{e^{3t}\} =$

(d) $\mathcal{L}\{\sin 2t\} =$

(e) $\mathcal{L}\{\cos 3t\} =$

- Bazi Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri: a ve c sabit sayılar olsun.

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}$
$e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$
$e^{ct} \sin at$	$\frac{a}{(s-c)^2 + a^2}$
$e^{ct} \cos at$	$\frac{s-c}{(s-c)^2 + a^2}$
$u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$
$f(t-c)u_c(t)$	$e^{-cs}F(s)$
$(f * g)(t)$	$F(s)G(s)$
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$e^{ct} \sinh at$	$\frac{a}{(s-c)^2 - a^2}$
$e^{ct} \cosh at$	$\frac{s-c}{(s-c)^2 - a^2}$
$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
$t^2 \sin at$	$(-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{a}{s^2 + a^2} \right)$

- $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$
- $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
- $\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^nY(s) - s^{(n-1)}y(0) - s^{(n-2)}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$

- Peki Laplace dönüşümünün içi daha karmaşık bir fonksiyon ise ne yaparız? Örneğin

$$\mathcal{L} \left\{ 4 \cos 2t - e^{3t} + 8t^2 + \frac{1}{2} \sin 2t \right\}$$

- **Laplace Dönüşümlerinin Lineerliği:** c sabit bir sayı olsun.

(a) $\mathcal{L}\{cf(t)\} = c\mathcal{L}\{f(t)\}$

(b) $\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$

- **Örnek 5.1** Aşağıdaki laplace donusumlerini bulunuz.

(a) $\mathcal{L}\{8t^2 - 2e^{-2t} + 3 \cos 4t\} =$

(b) $\mathcal{L}\{t^8 - 2e^{-\frac{1}{2}t} + 3 \sin 4t + 8\} =$

- $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \Big|_{s \rightarrow s-c} = F(s) \Big|_{s \rightarrow s-c} = F(s-c)$

• **Örnek 5.2** Aşağıdaki Laplace dönüşümlerini hesaplayınız.

(a) $\mathcal{L}\{e^{6t}t^3\} =$

(b) $\mathcal{L}\{e^{-2t} \cos 4t\} =$

(c) $\mathcal{L}\{e^{4t} \cos 6t\} =$

(d) $\mathcal{L}\{e^{-3t}t^4\} =$

- **Parçali-sürekli fonksiyonların Laplace dönüşümü:** Aşağıdaki parçalı fonksiyonun Laplace dönüşümünü limit tanımını kullanarak hesaplayınız.

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3 \end{cases}$$

5.2 Ters Laplace Dönüşümleri

Bugünün Kazanımı:

- Ters Laplace dönüşümü
- Ters Laplace dönüşümünün cebirsel özellikleri
- Ters Laplace dönüşümü nasıl yapılır
- Basit kesirlere ayırma
- Örnekler

- Eğer $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ ise, o halde $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ dönüşümüne, f 'in ters Laplace dönüşümü denir.

- **Örnek 5.3** Aşağıdaki ters dönüşümleri hesaplayınız

$$(a) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3!}{s^4} \right\} =$$

$$(b) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{7}}{s^2 + 7} \right\} =$$

$$(c) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-3)^2} \right\} =$$

$$(d) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+4}{(s+4)^2 + 36} \right\} =$$

- **Ters Laplace Dönüşümünün Lineerliği:** c sabit bir sayı olsun

(a) $\mathcal{L}^{-1}\{cF(s)\} = c\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

(b) $\mathcal{L}^{-1}\{F(s) + G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$

- **Örnek 5.4** Aşağıdaki ters dönüşümleri hesaplayınız.

(a) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s + 6}{s^2 + 4}\right\} =$

$$(b) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2s - 18}{s^2 + 28} \right\} =$$

$$(c) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 2}{(s - 3)^2 + 36} \right\} =$$

- **Soru:** Daha karışık ters dönüşümleri nasıl yaparız?

- **Örnek 5.5** Aşağıdaki ters Laplace dönüşümlerini hesaplayınız.

(a) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 6s + 9}{(s - 1)(s - 2)(s + 4)} \right\} =$

(b) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{26}{(s + 3)(s^2 + 4)} \right\} =$

$$(c) \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+4)(s^2+9)(s-3)^2 s^3} \right\} =$$

5.3 Laplace Dönüşümleri ile Diferansiyel Denklem Çözümü

Bugünün Kazanımı:

- Laplace dönüşümünü kullanarak sabit katsayılı diferansiyel denklemleri çözmek
- Daha önceki bölümlerde öğrendiğimiz Laplace kurallarını uygulayabilmek
- Örnekler

- Laplace dönüşümünü öğrenmemizin amacı onu diferansiyel denklemlerde kullanmaktır.

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

olsun.

- $\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$

- $\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$

- $\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^nY(s) - s^{(n-1)}y(0) - s^{(n-2)}y'(0) - \dots - y^{(n-1)}(0)$

- **Örnek 5.6** Laplace dönüşümünü kullanarak aşağıdaki başlangıç değer problemlerini çözünüz.

(a) $y' - 4y = e^{3t}, \quad y(0) = 7$

(b) $y' + 3y = 13 \sin 2t, \quad y(0) = 6$

(c) $y'' + 3y' + 2y = e^{-4t}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

(d) $y''' + 2y'' - y' - 2y = \sin 3t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1$

(e) $y'' + 3y = \cos 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

5.4 Parçalı Fonksiyon İçeren Diferansiyel Denklemlerin Laplace ile Çözümü

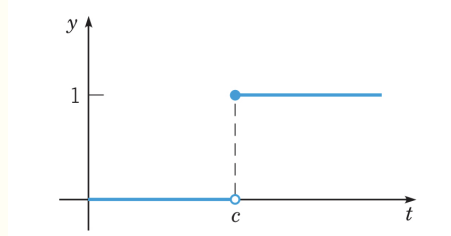
Bugünün Kazanımı:

- Parçalı fonksiyon
- Birim adım fonksiyonu
- Birim adım fonksiyonunu kullanarak parçalı fonksiyonu tek bir fonksiyon şeklinde yazmak
- Parçalı fonksiyon içeren diferansiyel denklemleri Laplace ile çözmek
- Örnekler

- Mühendislikte bazen sıfır, bazen ise sıfırdan farklı olan veri girişleri ile çok karşılaşırız. Mesela mekanik bir sisteme ya da elektrik devrelerine dışardan uygulanan bir güç ya da gerilim gibi.

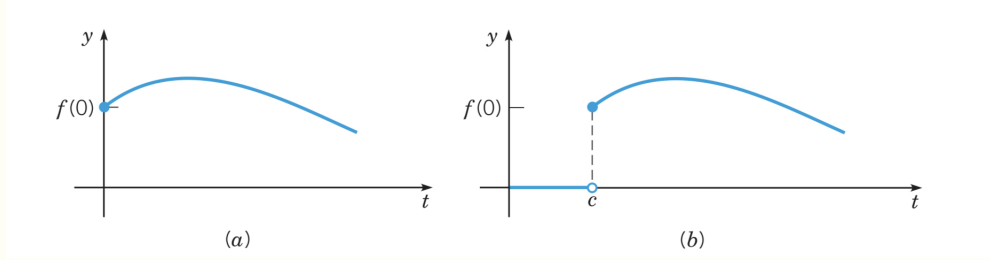
- Birim adım fonksiyonu $u_c(t)$

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c \\ 1, & t \geq c \end{cases}$$



- Bir fonksiyonun c kadar ötelenmesi

$$a) y = f(t) \quad b) y = u_c(t)f(t) = f(t - c)$$



- **Örnek 5.7** Aşağıdaki parçalı fonksiyonların grafiğini çizip, birim adım fonksiyonu cinsinden yazalım.

(a)

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 4 \\ 4, & 4 \leq t < 7 \\ -2, & 7 \leq t < 9 \\ 1, & t \geq 9 \end{cases}$$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{4} \\ \sin t + \cos \left(t - \frac{\pi}{4}\right), & t \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

- Birim fonksiyonunun Laplace dönüşümü:

- $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = \frac{e^{-cs}}{s}$

- $\mathcal{L}\{f(t)u_c(t)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t+c)\}$

- $\mathcal{L}\{f(t-c)u_c(t)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs} F(s)$

- $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs} F(s)\} = f(t-c)u_c(t)$

- **Örnek 5.8** Aşağıdaki Laplace dönüşümlerini hesaplayınız

(a) $\mathcal{L}\{u_3(t)\} =$

(b) $\mathcal{L}\{\cos tu_\pi(t)\} =$

(c) $\mathcal{L}\{(t^2 - 20t)u_3(t)\} =$

- **Örnek 5.9** Aşağıdaki başlangıç değer problemlerini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

(a)

$$y' + y = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 3 \cos t, & t \geq \pi, \end{cases} \quad y(0) = 5$$

(b) $y'' + 4y = (\sin t)u_{2\pi}(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

5.5 Dirac-Delta Fonksiyonu İçeren Diferansiyel Denklemlerin Laplace ile Çözümü

Bugünün Kazanımı:

- Dirac-delta fonksiyonu
- Dirac-delta fonksiyonunun Laplace dönüşümü
- Dirac-delta içeren diferansiyel denklemlerin Laplace ile çözümü
- Örnekler

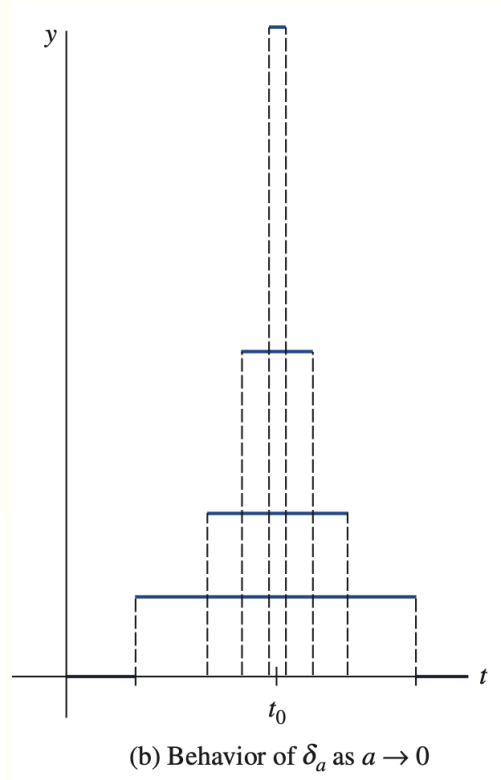
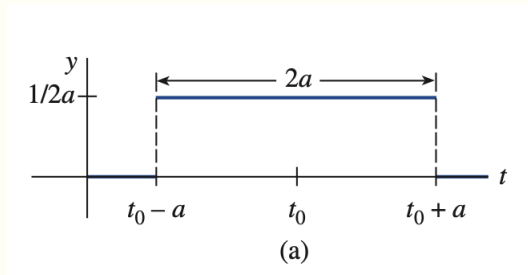
- Mekanik sistemler genelde dışardan bir kuvvete ihtiyaç duyarlar ve bu kuvvet çok kısa süre için çok büyük olabilir.

- Birim dürtü (Unit impulse) fonksiyonu

$$\delta_a(t - t_0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < t_0 - a \\ \frac{1}{2a}, & t_0 - a \leq t < t_0 + a \\ 0, & t \geq t_0 + a \end{cases}$$

- **Dirac Delta Fonksiyonu:**

$$\lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t - t_0) = \delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$



- $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}$

- $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

- **Örnek 5.10** Aşağıdaki başlangıç değer problemini Laplace dönüşümü ile çözünüz.

(a) $y'' + y = 4\delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

(b) $y'' + 2y' = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

5.6 İntegral İçeren Diferansiyel Denklemlerin Laplace ile Çözümü*

Bugünün Kazanımı:

- Belirli integral içeren diferansiyel denklemler
- Bu integrallerin Laplace dönüşümü – Konvolüsyon
- Bu tür denklemlerin Laplace ile çözümü
- Bu tür denklemlerin gerçek hayat uygulamaları
- Örnekler

- Bu bölümde belirli integral içeren

$$y'' + 4y = \int_0^t e^{\tau} \sin(t - \tau) d\tau$$

diferansiyel denklemlerini çözeceğiz. Bunlara evrişim(konvolüsyon) integralleri denir.

- **Konvolüsyon Integrali:** Eğer f ve g fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar ise, f ve g 'nin konvolüsyonu

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

- **Konvolüsyon Teoremi:** Eğer f ve g fonksiyonları $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar ise,

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

ve

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t)$$

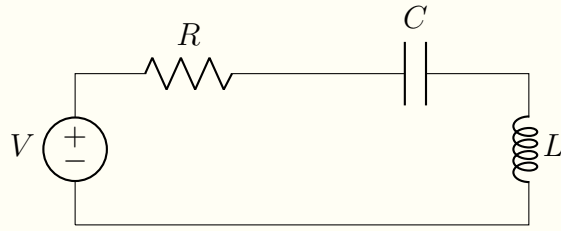
- **Örnek 5.11** Konvolüsyon Teoremini kullanarak aşağıdaki dönüşümleri hesaplayınız

(a) $\mathcal{L} \left\{ \int_0^t e^{\tau} \sin(t - \tau) d\tau \right\}$

(b) $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau)e^{t-\tau}d\tau$ denklemini çözerek $f(t)$ 'yi bulun.

- **Örnek 5.12** $y' + 6y + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0$ integral diferansiyel denklemini konvolüsyon teoremini kullanarak çözün.

- (Konvolüsyon Integralinin Uygulaması:



-

$$iR + \frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = V(t)$$

-

$$i = \frac{dq}{dt} \implies q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau$$

-

$$L \frac{di}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = V(t)$$

- **Örnek 5.13** Bir RLC devresinde $L = 0.1h$, $R = 2\Omega$, $C = 0.1f$, $i(0) = 0$ ve dıştan uygulanan voltaj $V(t) = 120t - 120tu_1(t)$ olduğunda devreden geçen akımı hesaplayınız.

5.7 Bölüm Özeti

- Bu bölümde Laplace dönüşümlerini öğrendik
- Laplace dönüşümleri genelde sabit katsayılı diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılır
- Sağ taraf bir polinom, trigonometrik veya üstel fonksiyon olabilir. Ayrıca birim adım fonksiyonu, integral fonksiyonu ya da dirac delta fonksiyonu olduğunda adımlar aşağıda ki gibi uygulanır.
 1. Diferansiyel denklemin her iki tarafının Laplace'ı alınır.
 2. Laplace tablosu kullanılarak $Y(s)$ yalnız bırakılır
 3. Ters laplace dönüşümü kullanılarak $y(t)$ bulunur.

5.8 Bölüm Problemleri

1. Aşağıdaki fonksiyonların Laplace dönüşümünü, Laplace tanımını kullanarak bulunuz.

(a)

$$f(t) = \begin{cases} -1, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

(b)

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}$$

(c)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$$

2. Aşağıdaki Laplace dönüşümlerini bulunuz.

(a) $\mathcal{L} \{ e^{2t} \sin(4t) - \cos(6t) - \frac{2}{5} e^t t^9 \}$

(b) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{48}{s^4} \right\}$

(c) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{(s+2)^2}{s^4} \right\}$

(d) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{10s}{s^2+16} \right\}$

(e) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)} \right\}$

(f) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^3+4s} \right\}$

(g) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s-8}{(s^2+1)(s^2+3s+2)} \right\}$

(h) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{5}{(s-3)^2+36} \right\}$

(i) $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s+4}{(s+2)^2+28} \right\}$

3. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerinin çözümünü Laplace dönüşümünü kullanarak bulunuz.

(a) $y'' + 5y' + 4y = 0, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$

(b) $y'' - 4y' = 6e^{3t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = -1$

(c) $y'' + y = \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t), \quad y(0) = 10, y'(0) = 0$

(d) $y'' - 5y' + 6y = (\sin t)u_2(t), \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$

(e) $y' + 6y + 9 \int_0^t y(\tau) d\tau = 1, \quad y(0) = 0$

(f) $y'' + y = \delta(t - 2\pi), \quad y(0) = 0, y'(0) = -3$

Bölüm 6 Lineer Diferansiyel Denklemler Sistemi*

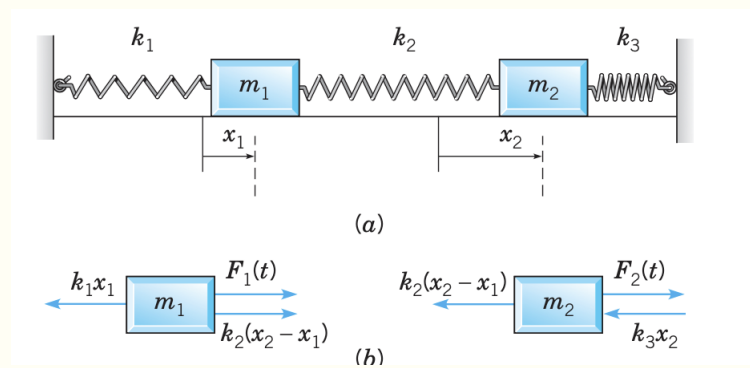
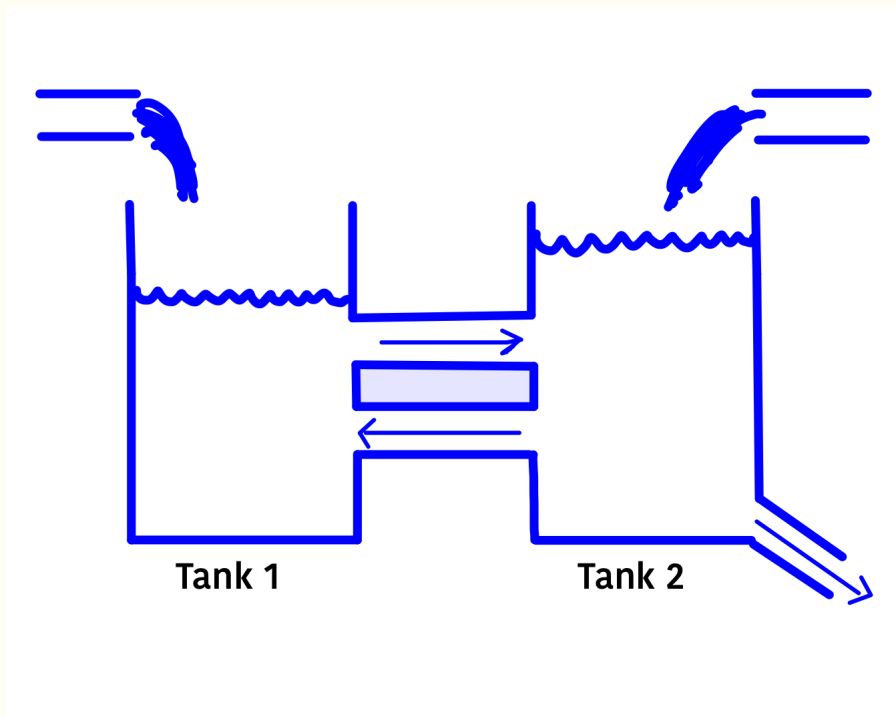
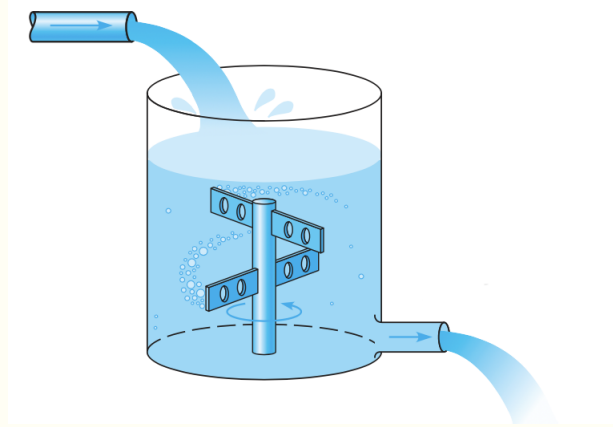
Bu bölümde neler öğreneceğiz:

- Bölüm 6.1:
 - Lineer sistemlere giriş
 - Matrislerin tekrarı
 - Lineer sistemlerin günlük hayat uygulamaları
- Bölüm 6.2:
 - Bazı Lineer sistemlerin yok etme yöntemi ile çözülmesi
- Bölüm 6.3:
 - Homojen lineer sistemler
 - Bu tür denklemlerin çözümü
- Bölüm 6.4:
 - Homojen olmayan lineer sistemler
 - Bu tür sistemler için çözüm yöntemleri
- Bölüm 6.5:
 - Üstel matris fonksiyonu
 - Üstel matris fonksiyonunun Laplace ile bulunması

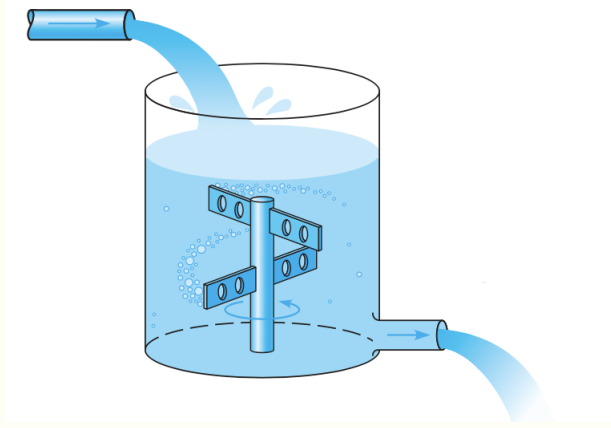
6.1 Lineer Sistemlere Giriş

Bugünün Kazanımı:

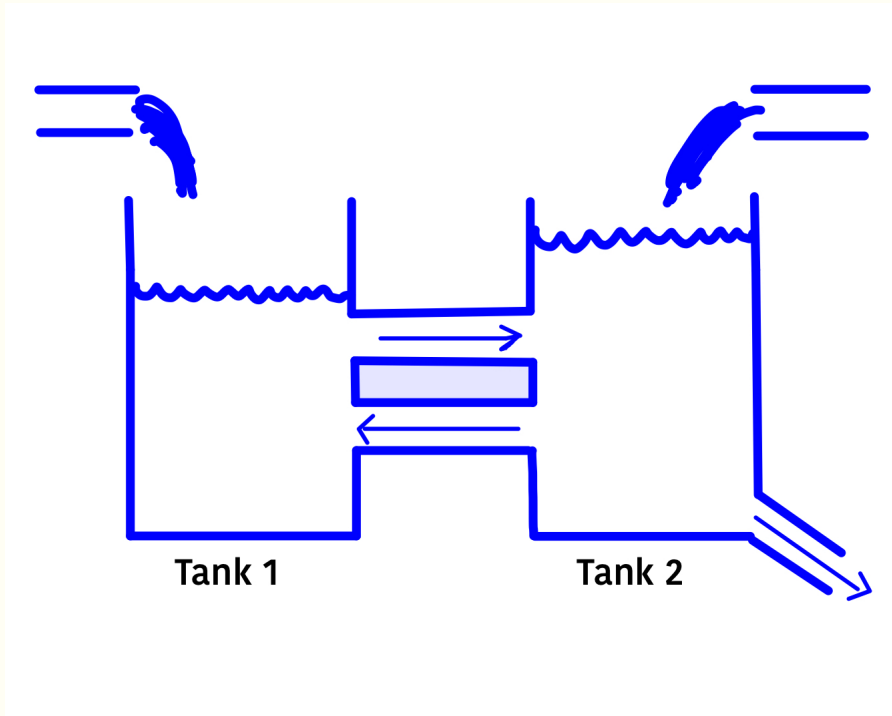
- Lineer sistemlerin kullanım alanları
- Matrislerin hatırlanması
- Homojen ve homojen olmayan lineer sistemlerin formu
- Örnekler



- **Örnek 6.1** İçinde 60lt saf su olan tank şekildeki gibi gösterilmiştir. 1 gr/lt tuz konsantrasyonu olan tuzlu su karışımı 2 lt/dak hızla tanka akıtılmaktadır. Tantaki su iyi karışmış olarak tutulmakta olup aşağıdaki delikten 3lt/dak su bosalmaktadır. Tank içindeki tuz değişim oranını herhangi bir t anında hesaplayan bir diferansiyel denklem yazınız.



- **Örnek 6.2** İçlerinde 30 lt ve 20 lt saf su olan iki tank şekildeki gibi birbirine bağlanmıştır. Birinci tanktan ikinci tanka sıvı akışı 3 lt/dak ve ikinci tanktan birinci tanka 1.5 lt/dk dır. Ayrıca Tank 2'den 2.5 lt/dk hızla dışarıya tuzlu su akıtılmaktadır. Her bir tantaki su iyi karışmış olarak tutulmaktadır. 1 gr/lt tuz konsantrasyonu olan tuzlu su karışımı 1.5 lt/dk hızla Tank 1 e akıyor. 3 gr/lt tuz konsantrasyonu olan tuzlu su karışımı 1 lt/dk hızla Tank 2 ye akıyor. Eğer $S_1(t)$ birinci tankta t anındaki tuz oranı ve $S_2(t)$ ikinci tankta t anındaki tuz oranı ise, tanklardaki tuz değişim oranını herhangi bir t anında hesaplayan bir diferansiyel denklem sistemi yazınız.



- **Matris** bir dikdörtgen sayılar tablosudur. $A = [a_{ij}]$ sembolü kullanılır

- **Örnek 6.3**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2}$$

- $\det A$ veya $|A|$

- **Matrisin Transpozu:** $A = [a_{ij}]$ ise $A^T = [a_{ji}]$

- **Matrisin Eşleniği:** $\overline{A} = [\overline{a_{ij}}]$

• **Matrislerin Toplanması ve Çıkarılması:**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

• **Matrisin bir sayı ile çarpılması:**

$$k \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$$

• **Matrisin bir başka matris ile çarpılması:** $A = [a_{ij}]$ ise $B = [b_{jp}]$ olmalıdır. Dolayısı ile $AB = C = [c_{ip}]$

• **Not:** $AB \neq BA$

• **Birim matris:**

$$I_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

• **Bir matrisin tersi:**

$$AB = BA = I \quad \implies \quad B = A^{-1}$$

• **2×2 matrislerin tersi için kural:**

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

• **Matrisin türevi:**

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A'(t) = \begin{pmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) \end{pmatrix}$$

• **Matrisin integrali:**

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \int_c^d A(t) dt = \begin{pmatrix} \int_c^d a_{11}(t) dt & \int_c^d a_{12}(t) dt \\ \int_c^d a_{21}(t) dt & \int_c^d a_{22}(t) dt \end{pmatrix}$$

- Birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemler sistemi

$$\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ x_n'(t) = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \quad (6.2)$$

- Eğer $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ ise, (6.2) sistemine **homojen sistem** denir. Aksi halde, (6.2) sistemine **homojen olmayan sistem** denir.

Örnek 6.4 Tank probleminde elde edilen sistemi matris şeklinde yazalım:

- **Örnek 6.5** Aşağıdaki sistemi matris şeklinde yazalım:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + y - z + t \\ \frac{dy}{dt} = x - z + 10t \\ \frac{dz}{dt} = -2x + 3y + 9z + 6t \end{cases}$$

- Eğer $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ vektörü (6.2) sistemini sağlıyorsa ona (6.2) sisteminin **çözüm vektörü** denir.

- Bu çözümlere **çözüm eğrileri(solution curves)** ve bu eğrilerin bulunduğu düzleme ise **faz düzlemi(phase plane)** diyoruz

- **Örnek 6.6**

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3e^{6t} \\ 5e^{6t} \end{pmatrix}$$

vektörlerinin

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

sisteminin çözümleri olduğunu gösteriniz.

- **Baslangic Değer Problemi:** Eğer (6.1) sistemine $\mathbf{x}(t_0) = \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix}$ baslangic değerini eklersek o zaman

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.3)$$

sistemine **baslangic değer problemi(initial value problem)** denir

6.2 Lineer Diferansiyel Denklem Sistemlerinin Eleme Yöntemi ile Çözümü:

Bugünün Kazanımı:

- Bazı lineer sistemlerin eleme(yok etme) yöntemi ile çözümü
- Örnekler

- Lineer sistemlerin nasıl çözüldüğünü henüz öğrenmedik ama bu bölümde lineer sistemler ile ikinci veya daha yüksek mertebeden lineer diferansiyel denklem arasında bir bağ kurup bu sistemleri **eleme yöntemi** ile çözebiliriz.

- **Örnek 6.7** Aşağıdaki lineer sistemi ele alalım:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - 2y \end{cases}$$

- **Örnek 6.8 (Evde Deneyin!)** Aşağıdaki lineer sistemi ele alalım:

$$\begin{cases} x' = x - y + e^{2t} \\ y' = 6x - 4y \end{cases} \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 2$$

- **Örnek 6.9** Her soru için eleme yöntemi pratik değil:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = x - z - v \\ \frac{dz}{dt} = -2x + 3y + 9z - 3v \\ \frac{dv}{dt} = -x + y - 3z + 2v \end{cases}$$

6.3 Homojen Lineer Sistemler

Bugünün Kazanımı:

- Homojen lineer sistemler için genel çözüm teoremi
- Çözümlerin lineer bağımsızlığı – Wronskian
- Temel çözüm kümesi
- Bir matrisin özdeğer ve özvektörleri
- Bir matrisin karakteristik denklemi
- Bu terimleri kullanarak homojen lineer sistemleri çözümü
- Örnekler

- Aşağıdaki homojen sistemi ele alalım

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (6.4)$$

- **Birleştirme İlkesi(Superposition Principle):** Eğer $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ vektörleri (6.4) sisteminin çözümleri ise,

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + \dots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$$

yine baska bir çözümdür. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sayılardır.

- **Genel Çözüm Teoremi:** Eğer $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ vektörleri (6.4) sisteminin lineer bağımsız çözümleri ise,

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}$$

denklemini (6.4)'un genel çözümüdür.

- **Lineer Bağımsızlık (Linear Independence):** $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ vektörleri (6.4) un herbir t için vektör çözümleri olsun . Eğer

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{0}$$

esitliği sadece $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ için sağlanıyorsa, $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ vektör seti lineer bağımsızdır denir. Aksi halde lineer bağımlıdır denir.

- **Wronskian(Linear Bağımsızlık Testi):**

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \quad \mathbf{x}^{(n)} = \begin{pmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix}$$

vektörleri (6.4) sisteminin n tane vektör çözümleri olsun. Eğer

$$W(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}) = \det \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \neq 0$$

verilen aralıkta her bir t için doğru ise, $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ vektörleri lineer bağımsızdır denir. Aksi halde vektörler lineer bağımlıdır diyoruz

- **Temel çözüm kümesi(Fundamental Set of Solutions):** $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ lineer bağımsız çözüm vektörlerine (6.4) sisteminin **temel çözüm kümesi** denir.

- (6.4) sistemi nasıl çözülür:

- Biliyoruz ki $x' = ax$ lineer homojen denklemin çözümü

$$x(t) = Ce^{at}$$

- Buna benzer olarak

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

lineer homojen sisteminin çözümü

$$\mathbf{x} = C.e^{\mathbf{A}t}$$

şeklinde düşünebiliriz ama detaya(daha sonra inmek şartı ile) inmeden

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} e^{\lambda t}$$

seklindedir. Burada λ sayısına **özdeğer(eigenvalue)**, başındaki vektöre ise **özvektör(eigenfunction)** diyoruz.

- **Özdeğer:** $\det(\mathbf{A} - \lambda I) = 0$ (Karakteristik denklem)

- **Özvektör:** Sıfırdan farklı bir $\mathbf{K}$ vektörü için

$$(\mathbf{A} - \lambda I)\mathbf{K} = \mathbf{0}$$

- **Örnek 6.10** Aşağıdaki matrisin

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) karakteristik denklemini
- (b) özdeğerlerini
- (c) özvektörlerini bulalım.

- Karakteristik denklemin kökü için üç olasılık var:
 - Bütün özdeğerler reel sayı ve birbirinden farklı
 - özdeğerlerden bazıları karmaşık sayı
 - özdeğerlerden bazıları tekrar eder

- **1. Durum – Reel değerli birbirinden farklı özdeğerler:** $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ reel sayıları $\mathbf{A}$ matrisinin birbirinden farklı özdeğerleri olsun. Ayrıca $\mathbf{k}^{(1)}, \mathbf{k}^{(2)}, \dots, \mathbf{k}^{(n)}$ uygun özvektörler olsun. Bu şartlar altında

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

sisteminin genel çözümü

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{k}^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{k}^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \mathbf{k}^{(n)} e^{\lambda_n t}$$

- **Örnek 6.11** Aşağıdaki lineer sistemlerin genel çözümünü bulalım.

$$(a) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -4x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} = y - 3z \end{cases}$$

- **2. Durum – Kompleks değerli özdeğerler:** Eğer özvektörlerden bazıları kompleks $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ve $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ise, bu durumda $\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t}$ ilk çözüm ise, $\overline{\mathbf{K}_1} e^{\lambda_2 t}$ ikinci çözümdür.

Örnek 6.12 Aşağıdaki lineer sistemlerin çözümünü bulalım

$$(a) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 6x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 4y \end{cases}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(c) \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- **3. Durum Tekrar eden reel değerli özdeğerler:**

- **İki Kez Tekrar eden özdeğerler:**

(a) İki tane lineer bağımsız özvektör

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{K}e^{\lambda_1 t} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}$$

(b) Sadece bir tane $\mathbf{K}$ özvektörü var ise,

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{K}e^{\lambda_1 t} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{K}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t}$$

• **Üç Kez Tekrar eden özdeğerler:**

- (a) Üç tane lineer bağımsız özvektör
 (b) Sadece bir tane $\mathbf{K}$ özvektörü var ise,

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P}$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{K}e^{\lambda_1 t} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{K}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}e^{\lambda_1 t} \quad \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{K}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{Q}e^{\lambda_1 t}$$

Örnek 6.13 Aşağıdaki lineer sistemlerin genel çözümünü bulunuz.

$$(a) \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$(b) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -6x + 5y \\ \frac{dy}{dt} = -5x + 4y \end{cases}$$

$$(c) \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

6.4 Homojen Olmayan Lineer Sistemler

Bugünün Kazanımı:

- Homojen olmayan lineer sistemlerin çözüm yöntemleri
- Parametrenin değişim yöntemi
- Laplace ile çözüm yöntemi
- Örnekler

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}$$

(6.5)

- (6.5) sisteminin genel çözümü

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{x}_\text{ö}$$

- (6.5) sistemi için genel çözümü bulmak için bazı yöntemler vardır. Bunlardan bazıları
 1. Belirsiz katsayılar yöntemi(Method of Undetermined Coefficients)
 2. Parametrenin değişim yöntem(Variation of Parameters)*
 3. Laplace dönüşümü*
 4. Köşegenleştirme yöntemi(Diagonalization Method)

- 2. Parametrenin degisim yöntemi ile (6.5) 'in genel çözümü

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_h + \mathbf{x}_\ddot{\mathbf{o}} \\ &= c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)} + \mathbf{x}_\ddot{\mathbf{o}}\end{aligned}$$

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)} + \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \mathbf{f}(t) dt \quad (6.6)$$

- Eğer $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ vektörleri $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sisteminin çözümleri ise, bu vektörlerin olusturdugu matrise

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

temel matris(fundamental matrix) denir.

- (6.5) sistemine başlangıç değeri eklediğimizde

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (6.7)$$

sistemini elde ediyoruz. Bu durumda (6.7) başlangıç değeri probleminin çözümü

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds \quad (6.8)$$

- **Örnek 6.14** Aşağıdaki lineer sistemlerin genel çözümünü parametrenin değişim yöntemi ile bulunuz.

$$(a) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 3 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• **3. Laplace dönüşümleri ile (6.7) sisteminin çözümü:**

Örnek 6.15 Aşağıdaki sistemleri Laplace kullanarak çözelim.

(a)

$$\begin{cases} 2x' + 3y' - y = 1 \\ x' + y' = e^{-3t} \end{cases}, \quad x(0) = -1, \quad y(0) = 0$$

(b)

$$\begin{cases} 2x' + y' - y = t \\ x' + y' = t^2 \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

(c)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• **Cevaplar:**

(a) Çözelim beraber

(b) $x(t) = -4 + 5t - 2t^2 + \frac{1}{3}t^3 + 5e^{-t}$ ve $y(t) = 5 - 5t + 2t^2 - 5e^{-t}$

(c) $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

6.5 Üstel Matris Fonksiyonu

Bugünün Kazanımı:

- Üstel fonksiyon ve üstel matris
- Üstel matrisin özellikleri
- Maclaurin serisi
- Üstel fonksiyonunun Laplace dönüşümü ile bulunması
- Örnekler

- Biz lisans diferansiyel denklem dersinden $x' = ax$ denleminin çözümünün $x = ce^{at}$ olduğunu biliyoruz.

- Doğal olarak $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sisteminin çözümünü $\mathbf{x} = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}$ şeklinde ifade edebilir miyiz? Aslında $e^{\mathbf{A}t}$ üstel matris fonksiyonu

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{I}$$

sisteminin çözümüdür

- $e^{at} = 1 + at + a^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{t^n}{n!}$

- $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n \frac{t^n}{n!}$

- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ matrisi için $e^{\mathbf{A}t}$ 'yi hesaplayın.

- Eğer $\mathbf{A}$ köşegen matrisi ise

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \implies e^{\mathbf{A}t} = \begin{pmatrix} e^{a_{11}t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_{22}t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_{nn}t} \end{pmatrix}$$

- **A** matrisi kosegen matris değil ise $e^{\mathbf{A}t}$ 'yi nasıl hesaplarız
 - (a) $e^{\mathbf{A}t}$ tanımı
 - (b) Laplace transform*
 - (c) Putzer Algoritması

- **Üstel matrisi bulmak için Laplace dönüşümü yöntemi:**

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$$

- **Örnek 6.16** Aşağıdaki sistem için üstel matrisi bulunuz

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{I}$$

- **Üstel Matrisin Özellikleri:**

- $\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}$

- $\det e^{\mathbf{A}t} \neq 0$

- $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}s} = e^{\mathbf{A}(t+s)}$

- $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$

- $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ise $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$

- Artık

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

sisteminin çözümünü ustel matris ile ifade edebiliriz:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)ds$$

- Parametrenin değişim yöntemi ile karşılaştırma:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}_0 + \mathbf{\Phi}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{\Phi}^{-1}(s)\mathbf{f}(s)ds$$

- $\mathbf{\Phi}(t)$ matris fonksiyonu $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ için temel matris olsun. Bu durumda her t için

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(0)$$

- **Örnek 6.17** Aşağıdaki sistemin çözümünü ustel matris yardimi ile bulalım.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$